

Stochastic Finite Difference Time Domain Methode

Cihan Ayaz

Zusammenfassung—Im Rahmen dieses Projektes wird eine Erweiterung der traditionellen *Finite Difference Time Domain Methode* (FDTD) implementiert. Diese Erweiterung, *Stochastic Finite Difference Time Domain* (SFDTD) genannt, soll eine Aussage über die Fehlerfortpflanzung innerhalb der Simulation ermöglichen, welche durch die Streuung der Werte der Permittivität und der elektrischen Leitfähigkeit entsteht.

Index Terms—MFDTD, Delta Methode, Varianz, Varianzquelle, SFDTD.

I. EINLEITUNG

In Simulationen kommen verschiedene Arten von Fehlern vor, wie z.B. Modellfehler oder Rundungsfehler. Ersteres umfasst unter anderem Diskretisierungsfehler, aber auch die Fehler, die aus der Streuung der Materialgrößen resultieren. Denn Größen wie die Permittivität ϵ_r oder die elektrische Leitfähigkeit κ , welche in den Simulationen verwendet werden, sind experimentell bestimmt. D.h. sie legen in der Form

$$\text{Messwert} = \text{Erwartungswert} \pm \text{Fehler}$$

vor. Aus einer Messung wird zunächst der Mittelwert, z.B. $\bar{\epsilon}_r$, ermittelt und anschließend aus einer Reihe von Messungen der Erwartungswert $\mu_{\bar{\epsilon}_r}$ aus den Mittelwerten.

Während die Diskretisierungsfehler ohne großen Aufwand hinreichend gut abgeschätzt werden können, vernachlässigt man Letzteres entweder ganz, es wird also z.B. $\epsilon_r = \mu_{\bar{\epsilon}_r}$ benutzt, oder es werden rechen- und zeitaufwändige Verfahren hinzugezogen (siehe Kap. II-C), um diese Fehler zu berücksichtigen.

Eine Alternative zur Abschätzung der oben genannten Fehler liefert die *Stochastic FDTD* (SFDTD) Methode. Sie stellt eine Erweiterung in Form zweier zusätzlicher Update Gleichungen der traditionellen FDTD Simulation dar, durch welche die rechen- und zeitaufwändigen Verfahren überflüssig werden sollen.

Im Folgenden sollen diese zwei Update Gleichungen hergeleitet werden, um anschließend die Ergebnisse an einem einfachen Modell (siehe Kap. II-B) mit denen der Monte Carlo Methode (siehe Kap. II-C) zu vergleichen.

15. März 2016

II. HERLEITUNG UND UMSETZUNG

A. Statistische Vorbetrachtungen

Wie bereits erwähnt handelt es sich bei den in der Simulation verwendeten Werten um experimentell bestimmte Erwartungswerte aus Mittelwerten. Entsprechend kann auf das *Central Limit Theorem* zurückgegriffen werden. Hiernach sind Messwerte, die wie beschrieben ermittelt wurden, stets gaußverteilt. Auf dieser Tatsache fußt z.B. die gesamte Fehlerrechnung der experimentellen Physik. Die Gaußverteilung

vorausgesetzt, lässt sich mit der *Delta Methode* die Varianz σ_f^2 einer Funktion $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ von N Zufallsgrößen mit den Erwartungswerten μ_i und den Varianzen σ_i^2 folgendermaßen abschätzen:

$$\sigma_f^2 \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \right|_{\mu_i, \mu_j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1)$$

Wobei ρ_{ij} der Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen X_i und X_j ist. Damit lässt sich berechnen, wie sich die Fehler fortpflanzen. Diese Methode wird in Kap. II-D verwendet, um die Fehlerfortpflanzung innerhalb der Simulation zu berechnen.

Als Nächstes wird die Konfiguration der Simulation vorgestellt.

B. Simulationskonfiguration

Es wurde ein äquidistantes kartesisches Rechengitter mit folgenden Parametern verwendet.

$$\begin{aligned} n_x = n_y = 2 & \quad n_z = 495 \\ dx = dy = dz = 1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Das Rechengitter wurde kanonisch indiziert. Durch die Kanten L_1, L_3 fließt ein Anregungsstrom:

$$\begin{aligned} j = 10^{-3} \sin(2\pi f t) \text{ A} \quad f \geq \frac{1}{10 dt} \\ dt = \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2}}} \end{aligned}$$

Durch die Randbedingungen

$$\begin{matrix} x_{min} & x_{max} & y_{min} & y_{max} & z_{min} & z_{max} \\ bc = (\text{PEC} & \text{PEC} & \text{PMC} & \text{PMC} & \text{PMC} & \text{PMC}) \end{matrix}$$

wurde gewährleistet, dass sich Ebene Wellen bilden, die sich in z -Richtung ausbreiten (PEC: Perfect Electric Conductor, PMC: Perfect Magnetic Conductor). Um Reflektionsfreiheit an den zwei Enden entlang der z -Achse zu erreichen, wurden an die Kanten $L_1, L_3, L_{n_p-3}, L_{n_p-1}$ Widerstände geschaltet:

$$R \propto Z_w = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen R und der Wellenimpedanz Z_w wurde so gewählt, dass der Reflektionskoeffizient an den Enden minimal wurde. Es wurde der Faktor 1,994998 verwendet.

Zudem wurde das mittlere Drittel des Rechengebietes mit drei verschiedenen Materialien befüllt (siehe Abb. 1).

Die Werte mitsamt Fehlern sind in Tab. I zusammengetragen.

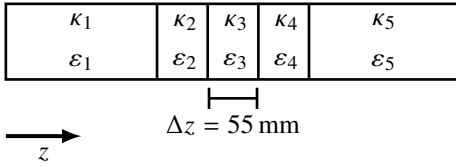


Abbildung 1: Seitenansicht des Rechengitters

Tabelle I: Materialparameter

Luft	$\epsilon_1 = 1$	$\kappa_1 = 0$	$\Delta z = 165 \text{ mm}$
Haut	$\epsilon_2 = 16.2 \pm 2.7$	$\kappa_2 = 0.214 \pm 0.06$	$\Delta z = 55 \text{ mm}$
Fett	$\epsilon_3 = 39 \pm 3.4$	$\kappa_3 = 0.43 \pm 0.1$	$\Delta z = 55 \text{ mm}$
Muskel	$\epsilon_4 = 55 \pm 4.6$	$\kappa_4 = 0.87 \pm 0.1$	$\Delta z = 55 \text{ mm}$
Luft	$\epsilon_5 = 1$	$\kappa_5 = 0$	$\Delta z = 165 \text{ mm}$

Die Simulationszeit betrug stets:

$$T = 12 n_z dt = 5490 dt \text{ s}$$

C. Monte Carlo Methode

Die Monte Carlo Methode liefert die aussagekräftigsten Ergebnisse, wenn es darum geht, eben solche Art von Fehlern abzuschätzen. Daher wird sie hinzugezogen, um die Ergebnisse der SFDTD Methode zu überprüfen. Die Idee dahinter ist ziemlich intuitiv, wenn die Simulation selbst wie eine Messung betrachtet wird. Um eine Größe durch ein Experiment zu bestimmen, werden mehrere Messungen vorgenommen. Anschließend wird aus den Messdaten $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$ über

$$\mu_x = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2)$$

der Erwartungswert und über

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 \quad (3)$$

die Varianz bestimmt.

Vollkommen analog dazu läuft die Monte Carlo FDTD Simulation (MFDTD) ab. Die Zufallsgrößen in dem Fall sind $\{\epsilon_r, \kappa\}$. Die Simulation wird N Mal wiederholt (hier $N = 1000$), wobei zu Beginn jeder Simulation die ϵ_r und κ Werte variiert und am Ende jeder Simulation die Feldvektoren gespeichert werden. Aus der Menge dieser Feldvektoren können dann zum Schluss über Gl.(2) und Gl.(3) die Erwartungswerte und Varianzen bestimmt werden. In Matlab genügen hierfür die Funktionen `mean()` und `var()`.

Dabei muss die Variation von ϵ_r und κ einer Gaußverteilung

$$P(\epsilon; \mu_\epsilon, \sigma_\epsilon) = \frac{1}{\sigma_\epsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\epsilon - \mu_\epsilon)^2}{2\sigma_\epsilon^2}} \quad (4)$$

entsprechen. Für z.B. $\mu_\epsilon = 16,2$ und $\sigma_\epsilon = 2,7$ kann das in Matlab durch

```
i| epsilon1=16.2+2.7*randn()
```

erreicht werden. Die Funktion `randn()` generiert Zufallszahlen aus der Normalverteilung $\mathcal{N}(0; 1)$.

Die Ergebnisse werden in Kap. II-E präsentiert.

D. Herleitung der Update Gleichungen

Die Vorgehensweise besteht darin, die *Delta Methode* auf die FDTD Update Gleichungen anzuwenden. Da hier ein äquidistantes kartesisches Rechengitter verwendet wird, sind die FDTD und die FIT Gleichungen äquivalent. Daher wird die *Delta Methode* auf die FIT Update Gleichungen (Gl.(9) und Gl.(10)) angewendet, wobei die elektrische Gitterspannung zum 'falschen' Zeitpunkt gemittelt wurde, also gilt:

$$\bar{e}^{(m+1)} = \frac{\bar{e}^{(m+\frac{3}{2})} + \bar{e}^{(m+\frac{1}{2})}}{2} \quad (5)$$

Die Funktion f aus Gl.(1) ist z.B. im Falle von Gl.(9)

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \bar{e}^{(m+\frac{3}{2})} \left(\epsilon_r, \kappa, \bar{e}^{(m+\frac{1}{2})}, \bar{h}^{(m+1)} \right) \quad (6)$$

Ein wichtiger Aspekt bleibt noch zu beachten: Wie der Abb. 2 in Kap. II-E entnommen werden kann, erzeugt die Referenzmethode MFDTD eine Varianzwellen. Die *Delta Methode* liefert ebenfalls eine Abschätzung für die Varianz, dem Quadrat der Standardabweichung. Um allerdings die Varianz der elektrischen Gitterspannung zum Zeitpunkt $t = m + \frac{3}{2}$ berechnen zu können, muss die Standardabweichung von $\bar{e}^{(m+\frac{1}{2})}$ bekannt sein (vgl. Gl.(6)). D.h., es muss die Wurzel aus der gesamten Gl.(1) gezogen werden. Dieses Vorgehen führt dann zu einer Varianzwellen, die nicht mehr in Phase zu der MFDTD Varianzwellen ist (siehe Abb. 4 in Kap. II-E). Die Erhaltung der Phase wird gewährleistet durch die Näherung, dass alle Zufallsgrößen in den Update Gleichungen stark korrelieren, es soll gelten:

$$\rho_{\epsilon, e} \approx \rho_{\epsilon, h} \approx \rho_{\epsilon, \kappa} \approx \rho_{\kappa, e} \approx \rho_{\kappa, h} \approx 1 \quad (7)$$

Damit kann Gl.(1) umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &\approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \Big|_{\mu_i, \mu_j} \sigma_i \sigma_j = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\mu_i} \sigma_i \right)^2 \\ \Rightarrow \sigma_f &\approx \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\mu_i} \sigma_i \end{aligned} \quad (8)$$

Durch diese Näherung können Wurzelausdrücke in den Update Gleichungen umgangen werden, die zu der unerwünschten Phasenverschiebung führen¹. Gl.(8) kann nun auf die n -te Komponente der Update Gleichungen (siehe Gl.(11) und Gl.(12)) angewendet werden. Mit Hilfe der Ableitungen² aus Gl.(13) und Gl.(14) erhält man Gl.(15) und Gl.(16). Wobei

$$\delta_\epsilon = \mathbf{diag} \left(\frac{\sigma_{\epsilon, n}}{\epsilon_{r, n}} \right) \quad \text{und} \quad \delta_\kappa = \mathbf{diag} \left(\frac{\sigma_{\kappa, n}}{\kappa_n} \right)$$

ist. In Matrixschreibweise ergibt das die Gl.(17) und Gl.(18), diese wurden dann in Matlab als Erweiterung zu Gl.(9) und Gl.(10) implementiert.

¹Das Wurzelziehen kann auch durch quadratische Ergänzung und die Taylorapproximation $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ vermieden werden, ohne dabei alle Korrelationskoeffizienten festlegen zu müssen. Die so erhaltenen Gleichungen wurden zwar ebenfalls implementiert, aber der Übersichtlichkeit wegen nicht angegeben.

²Auch auf die Angabe der Ableitungen für die Gl.(12) wurde hier der Übersichtlichkeit wegen verzichtet.

E. Ergebnisse

Die folgenden Plots zeigen die Varianzwelle der elektrischen Gitterspannung nach $T = 5940 dt s$ entlang einer x -Kante pro Schritt in z -Richtung. Das wären die Komponenten:

$$\{\sigma_e^2(1), \sigma_e^2(5), \sigma_e^2(9), \dots, \sigma_e^2(1977)\}$$

Somit lässt sich die Ausbreitung der Varianzwelle in z -Richtung visualisieren.

In Abb. 2 sieht man die Ergebnisse der SFDTD Methode im Vergleich zur MFDTD Methode, wobei alle Korrelationskoeffizienten $\rho = 1$ betragen. Die Varianz der SFDTD Methode hier ist offensichtlich zu groß. Dies kann durch eine Optimierung der Korrelationskoeffizienten (siehe Abb. 3) zwar verbessert werden, aber die Wahl des optimalen Korrelationskoeffizienten erforderte den Vergleich mit der MFDTD Methode, was ursprünglich vermieden werden sollte. Da eine sinnvolle Methode zur richtigen Wahl des Korrelationskoeffizienten nicht vorliegt, wird im Folgenden nur auf die Ergebnisse mit $\rho = 1$ eingegangen.

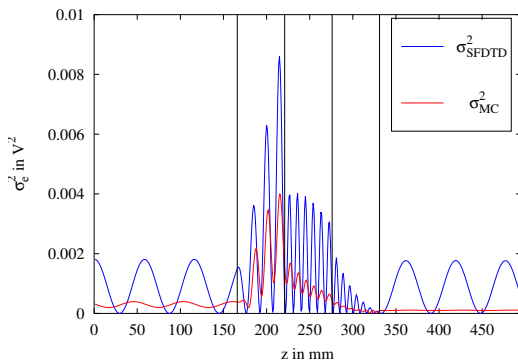


Abbildung 2: Varianz der elektr. Gitterspannung (SFDTD und MFDTD)

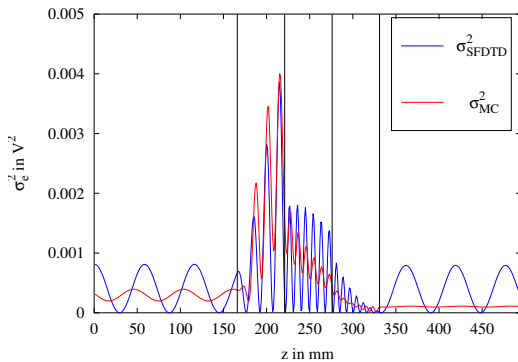


Abbildung 3: Varianz der elektr. Gitterspannung mit allen $\rho = 0.67$

Hierbei kommt es darauf an, was genau als Fehler angegeben werden soll und wie genau dieser sein muss. Eine Möglichkeit

wäre die maximale Amplitude der Varianzwelle in einem Bereich (Luft, Haut, Fett, Muskel) als Fehlerangabe zu wählen. Diese wäre z.B. in dem zweiten Bereich (Haut):

$$\text{SFDTD} \quad \sigma_e^2 = 0.0086012 V^2 \Rightarrow \sigma_e = 0,092743 V$$

$$\text{MFDTD} \quad \sigma_e^2 = 0.0039945 V^2 \Rightarrow \sigma_e = 0,063202 V$$

Diese Vorgehensweise bietet sich an, wenn z.B. lediglich eine obere Grenze für die Amplitude \hat{A} der Elektrischen Feldstärke, wie in [1], von Interesse ist. Diese maximale Amplitude (hier der elektrischen Gitterspannung) ließe sich dann erneut im zweiten Bereich berechnen zu:

$$\hat{A}_{\text{SFDTD}} = \mu_{e,max} + \sigma_e = 0,14457 + 0,092743 = 0,23731 V$$

$$\hat{A}_{\text{MFDTD}} = \mu_{e,max} + \sigma_e = 0,14457 + 0,063202 = 0,20777 V$$

Auf diese Weise erhält man in den drei anwendungsrelevanten Bereichen:

- Haut \hat{A}_{SFDTD} um 12% größer als \hat{A}_{MFDTD}
- Fett \hat{A}_{SFDTD} um 15% größer als \hat{A}_{MFDTD}
- Muskel \hat{A}_{SFDTD} um 30% größer als \hat{A}_{MFDTD}

Der Abb. 4 kann entnommen werden, was passiert, sollte auf die Näherung aus Gl.(7) verzichtet werden.

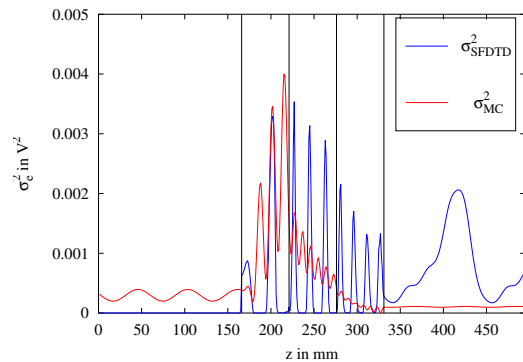


Abbildung 4: Varianz der elektr. Gitterspannung mit falscher Phase

III. FAZIT

Mit der Näherung $\rho = 1$ sind die Unterschiede zwischen den beiden Varianzen signifikant. Was fehlt, ist eine sinnvolle Methode zur optimalen Bestimmung der Korrelationskoeffizienten. Auf diese Weise könnte die SFDTD Methode die MFDTD Methode ablösen, denn der große Vorteil gegenüber der MFDTD Methode ist die Rechenzeit. Diese betrug für die Umsetzung aus Kap. II-B nur knappe 40s, während die gleiche Berechnung im Falle der MFDTD Varianz etwas mehr als 5h in Anspruch nahm.

LITERATUR

[1] S. M. Smith and C. Furse, *Stochastic FDTD for Analysis of Statistical Variation in EM Fields*, IEEE Transactions On Antennas And Propagation, Vol. 60, NO. 7, 2012.
 [2] R. J. Barlow, *Statistics: A Guide and Reference to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences*, WILEY, 1997.

Update Gleichungen

$$\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \right)^{-1} \left(\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \right) \widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + \Delta t \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \left(\widetilde{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)} \right) \right) \quad (9)$$

$$\widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} = \widehat{\mathbf{h}}^{(m)} - \Delta t \mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C} \widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} \quad (10)$$

$$\widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{3}{2})} = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \right)} \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{1}{2})} + \frac{\left(\frac{\Delta t \Delta s}{\Delta \tilde{A} \varepsilon} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \right)} \left(\sum_{i=1}^{3N_p} \tilde{C}_{ni} \widehat{h}_i^{(m+1)} + \widehat{j}_n^{(m+1)} \right) \quad (11)$$

$$\widehat{h}_n^{(m+1)} = \widehat{h}_n^{(m)} - \frac{\Delta t \Delta \tilde{s}}{\Delta A \mu} \sum_{i=1}^{3N_p} C_{ni} \widehat{e}_i^{(m+\frac{1}{2})} \quad (12)$$

Ableitungen

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{3}{2})}}{\partial \varepsilon_r} = \frac{\frac{\Delta t \kappa}{\varepsilon_0 \varepsilon_r^2}}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right)^2} \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{1}{2})} - \frac{\frac{\Delta t \Delta s}{\Delta \tilde{A} \varepsilon_0 \varepsilon_r^2}}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right)^2} \left(\sum_{i=1}^{3N_p} \tilde{C}_{ni} \widehat{h}_i^{(m+1)} + \widehat{j}_n^{(m+1)} \right); \quad \frac{\partial \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{3}{2})}}{\partial \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{1}{2})}} = \frac{1 - \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}}{1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{3}{2})}}{\partial \kappa} = - \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right)^2} \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{1}{2})} - \frac{\frac{\Delta t}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{\Delta t \Delta s}{\Delta \tilde{A} \varepsilon_0 \varepsilon_r}}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right)^2} \left(\sum_{i=1}^{3N_p} \tilde{C}_{ni} \widehat{h}_i^{(m+1)} + \widehat{j}_n^{(m+1)} \right); \quad \frac{\partial \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{3}{2})}}{\partial \widehat{h}_j^{(m+1)}} = \frac{\frac{\Delta t \Delta s}{\Delta \tilde{A} \varepsilon_0 \varepsilon_r^2} \tilde{C}_{nj}}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right)^2} \quad (14)$$

SFDTD Fehlerwellen komponentenweise

$$\sigma_{e_n}^{(m+\frac{3}{2})} = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \right)} \sigma_{e_n}^{(m+\frac{1}{2})} + \frac{\left(\frac{\Delta t \Delta s}{\Delta \tilde{A} \varepsilon} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \right)} \sum_{i=1}^{3N_p} \tilde{C}_{ni} \sigma_{h_i}^{(m+1)} + \frac{\left(\frac{\Delta t \kappa}{\varepsilon} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \right)^2} (\delta_{\varepsilon, nn} - \delta_{\kappa, nn}) \widehat{\mathbf{e}}_n^{(m+\frac{1}{2})} \\ - \frac{\left(\frac{\Delta t \Delta s}{\Delta \tilde{A} \varepsilon} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \right)^2} (\delta_{\varepsilon, nn} + \frac{\Delta t \kappa}{2 \varepsilon} \delta_{\kappa, nn}) \left(\sum_{i=1}^{3N_p} \tilde{C}_{ni} \widehat{h}_i^{(m+1)} + \widehat{j}_n^{(m+1)} \right) \quad (15)$$

$$\sigma_{h_n}^{(m+1)} = \sigma_{h_n}^{(m)} - \frac{\Delta t \Delta \tilde{s}}{\Delta A \mu} \sum_{i=1}^{3N_p} C_{ni} \sigma_{e_i}^{(m+\frac{1}{2})} \quad (16)$$

SFDTD Fehlerwellen (FIT)

$$\sigma_{e}^{(m+\frac{3}{2})} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \right)^{-1} \left(\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \right) \sigma_{e}^{(m+\frac{1}{2})} + \Delta t \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \widetilde{\mathbf{C}} \sigma_{h}^{(m+1)} \right. \\ \left. + \Delta t \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \right)^{-1} (\delta_\varepsilon - \delta_\kappa) \widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} - \Delta t \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \right)^{-1} \left(\delta_\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \delta_\kappa \right) \left(\widetilde{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)} \right) \right) \quad (17)$$

$$\sigma_{h}^{(m+1)} = \sigma_{h}^{(m)} - \Delta t \mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C} \sigma_{e}^{(m+\frac{1}{2})} \quad (18)$$