

Elektromagnetische Modellierung, Simulation und Optimierung einer Zylinderspule

Alexander Bauz, Franz Neumeister

Zusammenfassung – In dieser Ausarbeitung wird das Vorgehen der analytischen und numerischen Simulation, die Validierung der Ergebnisse sowie der Optimierung zur Minimierung der Verlustleistung eines Solenoids, beschrieben. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der geometrischen Optimierung, welche, unabhängig voneinander, mit zwei verschiedenen Algorithmen durchgeführt wurde. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse sowie ein Ausblick für weiterführende Arbeiten schließen den Bericht ab. [Neumeister]

I. EINLEITUNG

Spulen im Allgemeinen, Solenoide im Speziellen sind derart vielseitige und elementare elektrische Bauteile, dass sie aus heutigen technischen Anwendungen nicht mehr zu ersetzen sind. Als Beispiel seien hierfür nur Wirbelstrombremsen im Verkehrswesen, bildgebende Verfahren in der Medizin oder Positionierungseinheiten geostationärer Satelliten angeführt. Die Anzahl der Anwendungen, die von einer optimierten Verlustleistung profitieren würden, ist daher nicht zu unterschätzen und kann sowohl Kosten als auch Energie einsparen. Um diese Einsparpotenziale genau quantifizieren zu können, wurde zunächst eine beliebige, spiralförmige Spule einer analytischen und numerischen Betrachtung unterzogen (siehe II und III). Die Ergebnisse der analytischen Lösung als Referenz nutzend, erfolgt die Validierung der Simulationsergebnisse (Abschnitt III.B), sowie die Ermittlung einer verbesserten Parameterzusammenstellung (Abschnitt V). Unter Verwendung der Simulationssoftware CST STUDIO SUITE 2016® und zweier Optimieralgorithmen (Nelder Mead Simplex, Trust Region Framework) konnten die vorliegenden Resultate erarbeitet werden. Ein zusammenfassendes Fazit der Ergebnisse sei unter Abschnitt VI nachzulesen. [Neumeister]

II. PARAMETRISIERUNG EINER HELIXKURVE

Die nachfolgenden Auswertungen und Darstellungen wurden mithilfe des Programms MATHWORKS MATLAB® 2015a erzeugt.

A. Kurvenparametrisierung

Mithilfe der nachfolgenden Gleichung kann eine Helix beliebiger Ausdehnung angegeben werden:

$$K(t) = \begin{pmatrix} r_s \cos(2\pi Nt) \\ r_s \sin(2\pi Nt) \\ Lt \end{pmatrix}, \quad t = \{-0.5, 0.5\} \quad (1)$$

Der Laufparameter t wird in diesem Fall der symmetrischen Darstellung halber im entsprechenden Bereich gewählt, da

TABELLE 1:
GRÖßEN DER KURVENPARAMETRISIERUNG

Variable	Größe	Einheit	Initialwert
I	Gleichstrom	A	1
κ_{Cu}	Leitfähigkeit	S/m	$58 \cdot 10^6$
L	Spulenlänge	mm	10
N	Windungszahl	-	10
r_D	Drahtradius	mm	0.4
r_S	Spulenradius	mm	5
t	Laufparameter	-	-
μ_0	Magnet. Feldkonstante	Vs/Am	$4\pi \cdot 10^{-7}$

somit eine Zentrierung zum Koordinatenursprung gewährleistet ist. Eine genaue Bezeichnung der variablen Kenngrößen ist in folgende Tabelle 1 aufgelistet. Der für spätere Zwecke notwendige Drahtradius r_D wird bereits an diesem Punkt definiert, wird aber zunächst vernachlässigt. Als Ergebnis ist die in der folgenden Abbildung dargestellte Schraubenkurve zu sehen.

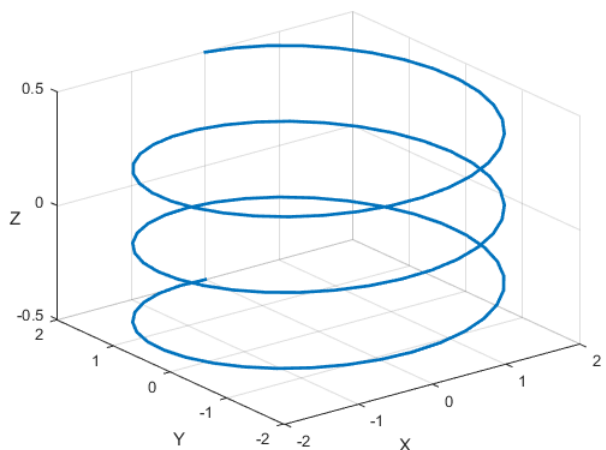


Abb. 1: Zylinderspule

Der stromführende Pfad ist bekannt und das Rechengebiet kann nun zur Berechnung des sich einstellenden Magnetfeldes evaluiert werden. [Neumeister]

B. Berechnung des magnetischen Feldes

Zur Auswertung der Kurvengleichung wird das Gesetz nach BIOT-SAVART herangezogen. Unter Verwendung dessen kann für einen beliebigen Linienstrom die sich einstellende magnetische Feldstärke \mathbf{H} bzw. Flussdichte \mathbf{B} berechnet werden. Die hierfür notwendige Formulierung lautet [1]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_p) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}_Q \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_Q)}{\|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_Q\|^3} \quad (2)$$

Der Vektor \mathbf{r}_Q wird als Quellvektor bezeichnet und zeigt vom Koordinatenursprung zum stromführenden Pfad, während der Aufpunkt(-vektor) \mathbf{r}_p die Position angibt, an dem die magnetischen Kenngrößen ausgewertet werden [2]. Die Lösungen werden nun getrennt, für die axialen (Z-Achse) (3) und radialen Komponenten (4), angegeben:

$$\mathbf{B}_z(\mathbf{r}_p) = \frac{\mu_0 NI}{2L} \left(\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{r_s^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{r_s^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right) \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_r(\mathbf{r}_p) = \frac{z\mu_0 NI}{2\sqrt{z^2 + (r_s^2 + r)^2}} \left(\frac{z^2 + r^2 + r_s^2}{z^2 + (r_s^2 - r)^2} E_2(k) - E_1(k) \right) \quad (4)$$

Gleichung (4) enthält dabei zwei elliptische Integrale 2. Art $E_2(k)$ und $E_1(k)$, wobei k , ähnlich wie in Gleichung (2), als Abstand zwischen Quell- und Aufpunkt aufzufassen ist [3]. Die sich aus diesen Lösungen ergebenden grafischen Verläufen sind in Abb. 2 und Abb. 3 zu erkennen.

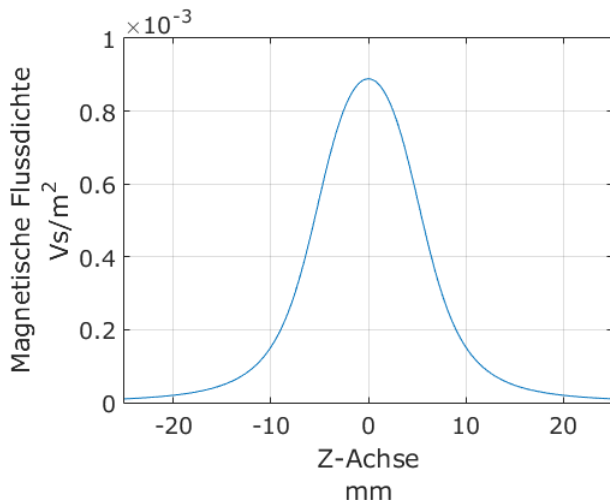


Abb. 2: Darstellung der analytischen Lösungen bezüglich der Axialkomponenten der magnetischen Flussdichte

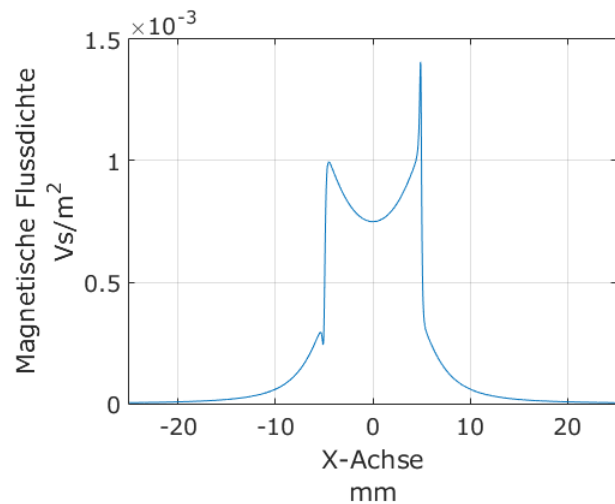


Abb. 3: Darstellung der analytischen Lösungen bezüglich der Radialkomponenten der magnetischen Flussdichte

Der Graph in Abb. 2 zeigt einen achsensymmetrischen, kontinuierlichen Verlauf, der im Koordinatenursprung sein Maximum erreicht. Ein anderer Verlauf ist hingegen Abb. 3 zu entnehmen. Mit Erreichen der stromführenden Leitungen nimmt die magnetische Flussdichte rapide zu, um im Spulennernen über den Zusammenhang $1/r$ abzufallen. Die Darstellung ist deswegen nicht symmetrisch, da auf der X-Achse der Abstand zwischen zwei Leitern abhängig von Windungszahl N und Spulenlänge L sind. Unter den gegebenen Parameterkombinationen kann daher der Fall eintreten, dass auf den beiden Spulenseiten der Abstand unterschiedlich ist und demnach verschieden große Werte berechnet werden. Dies ist auch der Grund dafür, dass für die späteren Simulationen keine Symmetrien ausgenutzt werden können. [Neumeister]

III. NUMERISCHE MODELLIERUNG

Für die Simulation und die spätere Optimierung muss zunächst ein Modell der Spule erstellt werden (Geometrie). Für dieses müssen dann die elektrischen Eigenschaften definiert werden (Material, Anregung).

A. Geometrie, Material, Anregung

Die Beschreibung der Spulenhelix erfolgt analog zur analytischen Betrachtung (s. Gl. (1) und Abb. 1). Allerdings wird die linienartige Helix der Spule nun mit einem Drahtradius r_D versehen, welcher für einen voluminösen Spulendraht sorgt. Dieser kann dann mit einem Material versehen werden.

Als Material wird reines Kupfer gewählt. Die spezifische Leitfähigkeit κ beträgt dabei $5,96 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$.

Die Anregung der Spule erfolgt über einen Gleichstrom. Der einfacheren Validierung halber fällt die Wahl dieses Stromes auf 1A, sodass mithilfe des Ohm'schen Gesetzes die Verlustleistung validiert werden kann

$$P_v = I^2 \cdot R \quad (5)$$

Für die Stromanregung wird im Simulationsumfeld der CST Studio Suite® der Strompfad gewählt. Je einer (hin- und abführend) verläuft vom Rechenrand auf die entsprechende Stirnfläche der Helixspule. [Bauz]

B. Randbedingungen, Rechengitter, Löser

Da bei der Simulation Felder unendlicher Ausbreitung in einem endlichen Rechengebiet erzeugt werden, müssen die Randeigenschaften des Rechengebiets festgelegt werden. Diese Randbedingungen sind essentiell wichtig für die Simulation. Hier wird ein Neumann-Rand gewählt. Dieser kommt einem natürlichen offenen Rand näher als z.B. der Dirichlet-Rand.

Für das Rechengitter wird ein Tetraeder-Gitter erzeugt. Diese Gitterform erzeugt für unsere Anwendung natürlichere Feldverläufe als z.B. ein kartesisches Gitter. Eine Konvergenzstudie hat zu einer Tetraederanzahl von ungefähr 70000 geführt. Da aber die adaptive Gitterverfeinerung für eine bessere Auflösung aktiviert ist, kann dies bei jeder Simulation zu leichten Varianzen dieser Anzahl führen.

Genauso verhält sich auch die Rechenzeit für jede Simulation. Im Durchschnitt beträgt diese 5min. [Bauz]

IV. VALIDIERUNG

Nach Vorliegen beider (analytischer und numerischer) Betrachtungen kann an diesem Punkt die Validierung vollzogen werden. Diese erfolgt anhand von drei Kenngrößen.

A. Axiale und radiale Feldkomponenten

Die Übereinstimmung der axialen Feldkomponenten ist an jedem Punkt zu einem hohen Grad gegeben. Die Ergebnisse der radialen Feldergebnisse weichen hingegen vor allem im Bereich des Spuleninneren mit zunehmender Entfernung zu den Leitern voneinander ab. Als Gründe hierfür sind vor allem der Diskretisierungsübergang und das nicht beachten des Drahtradius der Spulenwindungen in der analytischen Rechnung anzuführen. Im restlichen Bereich wird aber ein hoher Deckungsgrad erreicht. [Neumeister]

B. Gleichstromwiderstand bzw. Verlustleistung

Zur weiteren Validierung wird der Einfluss bestimmter Geometrieparameter auf den Gleichstromwiderstand untersucht. Unter Berücksichtigung der Wahl des Erregungsstrom I von 1A ergibt sich daraus die Verlustleistung wie folgt:

$$P_v = \frac{\sqrt{(4\pi N r_s)^2 + L^2}}{2\pi \kappa_{Cu} r_D^2} I^2 \tag{6}$$

Auch hierfür ergeben sich maximale Fehlerabweichungen von unter 5% für den Parameter L , bei den Größen r_s und r_D sogar nur maximal 1%. [Neumeister]

C. Parameterstudie

Um die grundlegenden Einflüsse der Geometrieparameter der Spule auf die Verlustleistung P_v festzustellen und geeignete Nebenbedingungen für das Optimierungsproblem zu finden, wird eine Parameterstudie durchgeführt. Diese Studie wird innerhalb des Programmes simuliert und analytisch berechnet um eine Fehlerabschätzung zu machen.

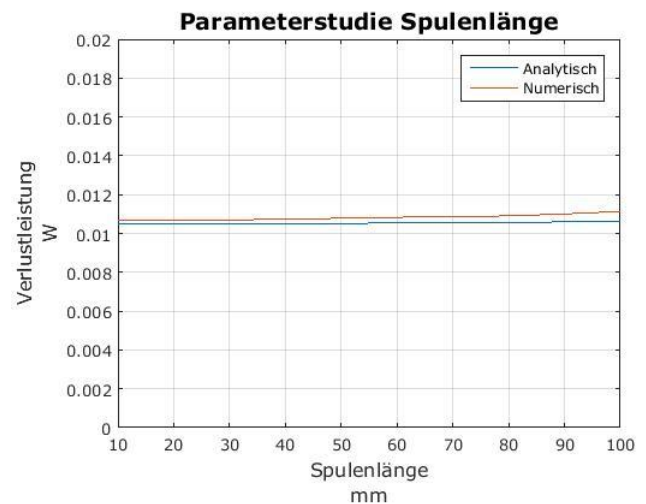


Abb. 3: Verlustleistung in Abhängigkeit der Spulenlänge

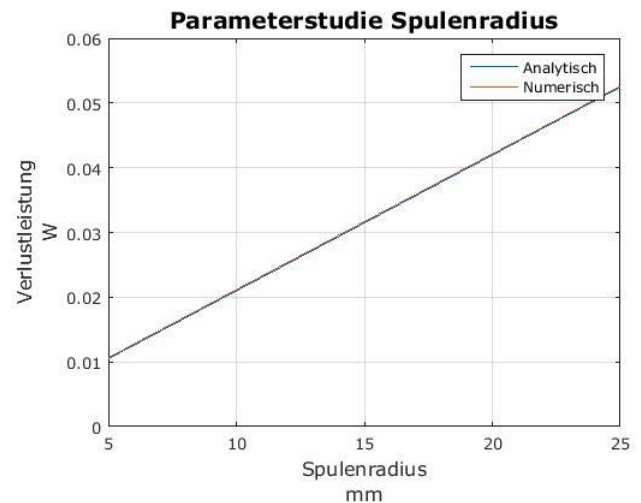


Abb. 4: Verlustleistung in Abhängigkeit des Spulenradius

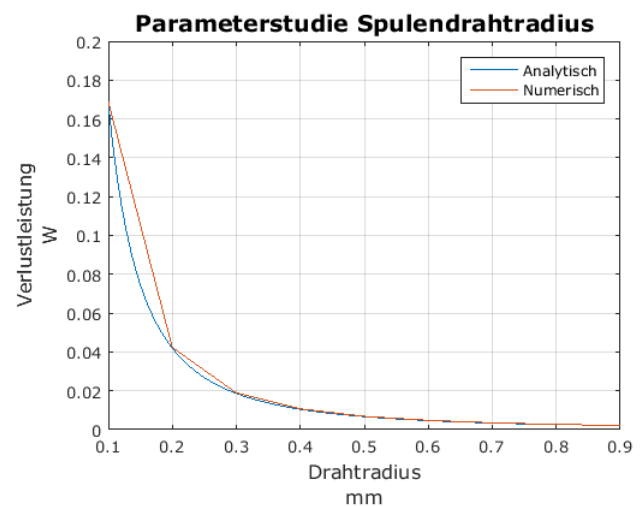


Abb. 5: Verlustleistung in Abhängigkeit des Drahtradius

Bei allen obigen Messpunkten ergab sich ein maximaler relativer Fehler von 5%. Somit kann auch für das Ergebnis nach der Optimierung eine solche maximale Fehlergrenze für die Verlustleistung angenommen werden. Der Bezug liegt dabei auf die analytische Berechnung nach Gl. (6). [Bauz]

V. OPTIMIERUNG

Für die Optimierung wird die Verlustleistung, die im Spulendraht durch den Stromfluss entsteht, minimiert. Variable Größen sind dabei die Geometrieparameter der Spule:

- Drahradius r_D
- Spulenlänge L
- Spulenradius r_S

[Bauz]

A. Optimierungsproblem

Es wird folgendes restringiertes Optimierungsproblem formuliert werden:

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } P_V(\mathbf{x}) \\ &\text{u.d.N } g(\mathbf{x}) < 0 \\ &\text{mit } P_V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

wobei \mathbf{x} den Vektor aus den Geometrieparametern (L , r_S , r_D) darstellt. Diese Nebenbedingungen werden anhand einer zuvor durchgeführten Parameterstudie für jeden Parameter bestimmt. Diese entsprechen klassischen Box-Constrains:

$$\begin{aligned} 0,5\text{mm} &\leq r_S \leq 100\text{mm} \\ 0,1\text{mm} &\leq L \leq 100\text{mm} \\ 0,1\text{mm} &\leq r_D \leq 0; 4\text{mm} \end{aligned}$$

Da diese Nebenbedingungen sehr starr wirken und einen relativ begrenzten Wertebereich abdecken, werden die Nebenbedingungen durch Abhängigkeiten erweitert. Dadurch wird ein größerer Wertebereich aufgespannt und evtl. eine im Sinne unseres Optimierungsproblems bessere Parameterzusammenstellung gefunden. Folgende mit Abhängigkeiten versehene Nebenbedingungen werden gewählt:

$$\begin{aligned} r_D + 0,1\text{mm} &\leq r_S \leq 100\text{mm} \\ 2\pi(r_D + 0,1\text{mm})N &\leq L \leq 100\text{mm} \\ 0,1\text{mm} &\leq r_D \leq \frac{L}{2N} - 0,1\text{mm} \end{aligned}$$

[Bauz]

B. Optimierungsergebnisse

In CST STUDIO SUITE 2016® sind, neben vielen weiteren Algorithmen, der Trust-Region-Algorithmus implementiert. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Optimierungsproblem mithilfe der in CST STUDIO SUITE 2016® implementierten Variante, dem sogenannten Trust-Region-Framework (TRF), gelöst.

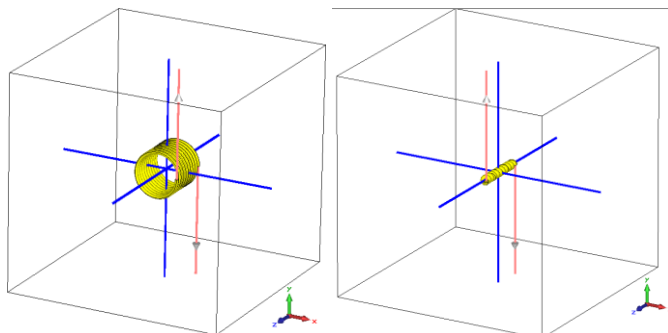


Abb. 6: initiale Spule links, optimale Spule rechts mit TRF

TABELLE 2:
PARAMETERZUSAMMENSTELLUNG

Variable	Beschreibung	Initialwert	Optimalwert
L	Spulenlänge	10mm	10mm
r_D	Drahradius	0,4mm	0,4mm
r_S	Spulenradius	5mm	0,5mm
P_V	Verlustleistung	11mW	1,1mw

[Bauz]

VI. FAZIT

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Verlustleistung in einer Spule mithilfe eines kommerziellen Programms (CST STUDIO SUITE 2016®) um 1/10 reduziert werden. Auch ihre Ausdehnung wurde verringert (s. Abb. 15), was weniger Platzbedarf auf z.B. Platinen bedeutet.

Außer Acht wurde dabei allerdings die Induktivität gelassen. Diese ist für elektronische Anwendungen allerdings sehr wichtig. Hierzu muss aber erstmal definiert werden welche Induktivität für das Problem relevant ist (äußere oder innere). Und es muss ein Weg gefunden werden diese in der Software zu definieren.

Eine grundlegende Voraussetzung für die Betrachtung ist ein zeitlich abhängiger Erregungsstrom. Hierfür wurden schon grundlegende Simulationen durchgeführt, die auch die Stromverdrängung innerhalb der Spule zeigen.

Somit bietet dieses Thema auch noch weiteren Stoff sich tiefer mit diesem Problem auseinander zu setzen. [Bauz]

LITERATUR

- [1] H. Henke, *Elektromagnetische Felder*, Springer Verlage, 4. Auflage Heidelberg, 2011, S. 45f.
- [2] K. Küpfmüller, et al., *Theoretische Elektrotechnik*, Springer Verlag, 17. Auflage Heidelberg, 2006, S. 310
- [3] J.C. Simpson, et al., "Cartesian Coordinates", in *Simple Analytic Expressions for the Magnetic Field of a Circular Current Loop*, NASA, Kennedy Space Center, 2001
- [4] M. Ulbricht, S. Ulbricht, *Nichtlineare Optimierung*, Birkhäuser Verlag, 1. Auflage Basel
- [5] CST Optimization, <https://www.cst.com/Products/CSTS2/Optimization> (Stand: 31.03.2016)
- [6] W. Alt, *Nichtlineare Optimierung : eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*, 2. Auflage Braunschweig, 2011
- [7] M. Ulbricht; S. Ulbricht, *Nichtlineare Optimierung*, Basel: Birkhäuser, 2012
- [8] MATLAB, Version 8.5.0 (R2015a). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2015
- [9] CST STUDIO SUITE 2016®, <https://www.cst.com/>