

Programmierung eines 3D-Finite Elemente Löser

Hannes Borgiel und Malte Dornieden

Zusammenfassung—Die Methode der Finiten-Elemente (FEM) ist ein gebräuchliches numerisches Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Mit der vorliegenden Arbeit soll kurz vorgestellt werden, wie sich dieses Verfahren auf eine Problemstellung der elektromagnetischen Feldberechnung anwenden lässt. Im Fokus steht dabei die anregungsfreie Wellengleichung mit konstanter Materialverteilung. Die geometrische Struktur in der sich die Moden (Eigenlösungen) ausbilden ist als Zylinder gewählt.

Stichworte—Elektromagnetisches Eigenwertproblem, Konvergenzstudie, Elektromagnetische Felddarstellung

I. EINLEITUNG

Das Verfahren der Finiten-Elemente zur Lösung von vektoriiellen Feldproblemen wurde in [1] das erste Mal erfolgreich umgesetzt. Ausgehend von der Zusammenfassung dieser Theorie in [2] soll in dieser Arbeit ein in *MATLAB* [3] erstellter Finite-Elemente-Löser vorgestellt werden, mit dem sich die Resonanzfrequenzen von geometrischen Objekten wie Resonatoren berechnen lassen. Des weiteren soll gezeigt werden, wie sich anhand der Ergebnisse des Löser und der Verwendung des Visualisierungstools *Paraview* [4] die Felddarstellungen der einzelnen Moden anschaulich darstellen lassen. Aus Zeit- und Komplexitätsgründen werden mehrere Vereinfachungen getroffen, so ist der Löser ausschließlich für rot-rot-Eigenwertgleichungen mit harmonischer Zeitabhängigkeit sowie für Geometrien mit homogener Materialverteilung konzipiert. Zu Beginn soll ein kurzer Einblick in die Theorie der Finiten-Elemente gegeben werden, insbesondere mit Hinblick auf die Methode der gewichteten Residuen (Galerkin-Ansatz). Anschließend wird struktografisch die Implementierung des Verfahrens in das Programm erläutert und eine Konvergenzstudie bezüglich der numerischen Lösung für die Resonanzfrequenzen durchgeführt. Zum Schluss wird vorgestellt, wie anhand der Eigenvektoren aus der Lösung des Verfahrens eine Visualisierung der dreidimensionalen Feldlösung erfolgen kann.

II. THEORIE DER FINITE-ELEMENTE

A. Formulierung der Eigenwertgleichung

Grundlage des Löser ist die homogene Wellengleichung, welche sich aus den Maxwell-Gleichungen herleiten lässt. Für ein anregungsfreies Feldproblem und der Annahme dass keine Verluste auftreten, gelangt man auf die bekannte partielle

M. Dornieden ist Student im Masterstudiengang Elektro- und Informationstechnik, Technische Universität Berlin, Fachbereich Theoretische Elektrotechnik.

H. Borgiel ist Student im Masterstudiengang Elektro- und Informationstechnik, Technische Universität Berlin, Fachbereich Theoretische Elektrotechnik.

Differentialgleichung 2. Ordnung. Dabei können die Materialverteilungen noch beliebig gewählt werden.

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} - \omega^2 \epsilon \vec{E} = 0, \quad (1)$$

B. Übergang zum numerischen Lösungsverfahren

Um die Eigenwertgleichung (1) mithilfe eines numerischen Verfahrens zu lösen, wird die Geometrie des Objektes im Folgenden durch ein Tetraedernetz diskretisiert. Auf den Kanten eines jeden Tetraeders wird das elektrische Feld durch stückweise definierte, vektorielle *Ansatzfunktionen* approximiert.

$$\vec{E} \approx \vec{\tilde{E}}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \vec{f}_i(x, y, z) \quad (2)$$

Finales Ziel ist es, die Koeffizienten α_i für jede Ansatzfunktion so zu bestimmen, dass durch Gewichtung der Ansatzfunktionen mit diesen Koeffizienten der Feldverlauf in gewisser Hinsicht angenähert wird. Das Einsetzen von (2) in (1) ergibt die Näherungsgleichung

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{E}} - \omega^2 \epsilon \vec{\tilde{E}} = \text{Residuum}. \quad (3)$$

Da für das Feld nun eine Näherungslösung eingesetzt wird, tritt an jedem Punkt eine Abweichung von der analytischen Lösung auf, das sogenannte Residuum. Ziel ist es deshalb, dieses Residuum durch Wahl einer geeigneten *Gewichtsfunktion* möglichst minimal zu bekommen.

C. Methode der gewichteten Residuen

Dieser Ansatz wird auch als Methode der gewichteten Residuen bezeichnet. Wird nun die Gewichtsfunktion zur Minimierung des Residuums gleich der Ansatzfunktion gewählt, ($\vec{f}_i = \vec{\tilde{f}}_i$) so spricht man vom sogenannten *Galerkin-Ansatz*. Nun wird gefordert, dass die Integration des Residuums über das ganze Rechengebiet verschwindet. Dazu wird die Gleichung (4) mit der Gewichtsfunktion \vec{f}_j eingeführt (Herleitung [2]).

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{E}} - \omega^2 \epsilon \vec{\tilde{E}} \right) \cdot \vec{f}_j dV = 0 \quad (4)$$

Nach Umformungen und partieller Integration ("schwache Formulierung") lässt sich nun eine sogenannte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und eine Massenmatrix \mathbf{M} wie folgt

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_V \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{f}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}_j) dV \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_{\epsilon, ij} = \int_V \vec{f}_j \cdot (\epsilon \vec{f}_i) dV \quad (6)$$

formulieren. Die Masse- und Steifigkeitsmatrix werden nun für jedes einzelne Tetraeder aufgestellt und in ein globales

Matrixsystem "assembliert". Das Variationsproblem reduziert sich somit auf das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) (\alpha_i) = 0. \quad (7)$$

Nach dem Lösen dieser Eigenwertgleichung erhält man schlussendlich die Eigenwerte in Form von Resonanzfrequenzen des Systems und die Eigenvektoren in Form der Gewichtungsfaktoren α_i aus (2).

III. STRUKTUR DES PROGRAMMS

A. Ansatzfunktionen im Bildbereich

Aus Effizienzgründen werden die Knotenansatzfunktionen "Lambda", in Bildbereichskoordinaten definiert. Die Terminologie *Bildbereich* wird eingeführt, um Rechnungen wie Volumenintegration zu vereinfachen. Dazu wird eine affine Abbildung mittels der Transformationsvorschrift \mathcal{F} eingeführt. \mathcal{F} skaliert die einzelnen Eckpunkte eines beliebig im Raum angeordneten Tetraeders auf den Ursprung sowie auf die Achsen ξ , η und ζ mit Betrag eins. Formal ist \mathcal{F} in Richtung $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x, y, z)$ definiert [2]. Die vektoriellen Ansatzfunktionen, Whitney Funktionen [1], ergeben sich wie in Abb. 1. Die Knotenansatzfunktionen λ werden dabei so

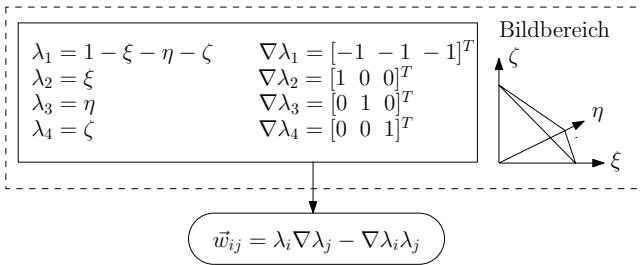


Abbildung 1: Bildbereichsdefinition

definiert, dass die "Partition of Unity" [2] eingehalten ist. Darüber hinaus sorgen die Whitney-Funktionen für stetige Vektorfelder an den Elementübergängen [1]. Die vektoriellen Ansatzfunktionen \vec{w}_{ij} sind kantenorientiert, somit adressieren ihre Indices die Kante zwischen den jeweiligen Knoten i und j . Da der Gradient gebildet wird, ist die Funktion im ganzen Tetraeder bestimmt.

B. Verbindung von Gewichts- und Ansatzfunktion

Die Lage von Ansatzfunktion und Gewichtsfunction zueinander ist im Programm von wesentlicher Bedeutung. Aus (5) und (6) folgt, dass nur dann ein Beitrag ungleich Null erzielt wird, wenn sich die Ansatzfunktionen überschneiden, d.h. deren Kanten-Repräsentation im selben Tetraeder liegt. Formal kann die Volumenintegration in (5) und (6) im Originalbereich aufgeschrieben werden und dann durch die Integration in affinen Koordinaten (Koordinatensubstitution) ersetzt werden (8). Somit erhält man auf beiden Seiten im wesentlichen den gleichen Ausdruck, nur in anderen Koordinaten, anderen Grenzen und der anmultiplizierten Jacobimatrix, welche später zur Transformation der Gewichts- und Ansatzfunktion noch benötigt wird. Das Ergebnis dieser Volumenintegration im

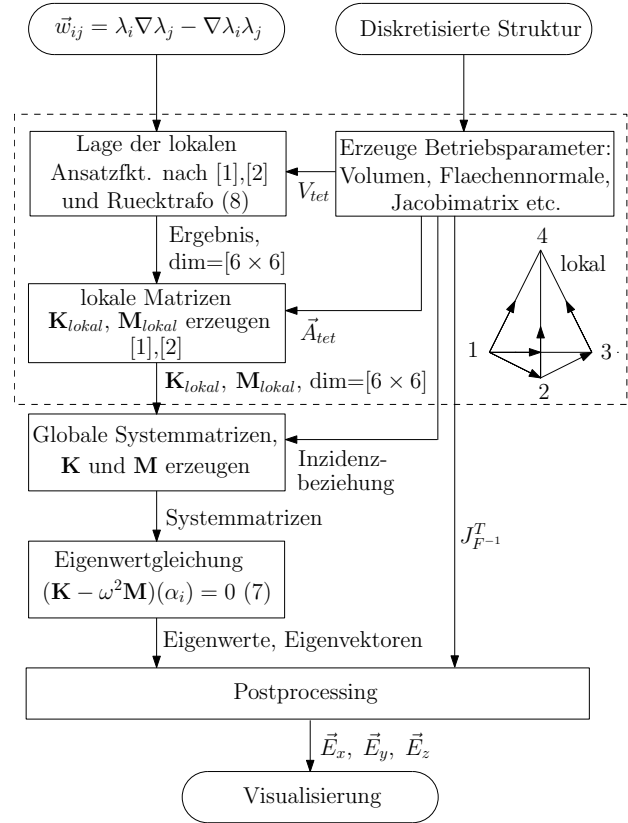


Abbildung 2: Flussbild

Bildbereich ist eine direkte Volumenabhängigkeit, da die Jacobimatrix ebenfalls eine feste Volumenabhängigkeit aufweist, zur Herleitung siehe [2]. Die Partitionierung von \mathbf{K}_{lokal} und \mathbf{M}_{lokal} , welche von der Lage der Vektorfunktionen zueinander abhängt, ist auf Grund der Integration über ein Einheits-tetraeder und den begrenzten Möglichkeiten ($6^2 = 36$) immer dieselbe und kann der Literatur entnommen werden [1].

$$\int_{\Omega} \lambda_i(x, y, z) dV_{xyz} = |J_{\mathcal{F}^{-1}}^T| \int_{\zeta=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\zeta} \int_{\xi=0}^{1-\zeta-\eta} \underbrace{\lambda_i(\mathcal{F}_{\Omega})}_{\lambda_i(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta \quad (8)$$

C. Assemblierung

Assemblierung wird die Schnittstelle zwischen den lokalen Größen des Referenztetraeders bzw. Einheits-tetraeders und dem globalen Diskretisierungsgitter genannt. Da der Algorithmus kantenbasiert ist, kann man die Definitionsräume über die Gesamtheit ihrer Kanten beschreiben. Die Assemblierung wird direkt im "Sparse"-Format vorgenommen. Im Struktogramm in Abb. 3 ist die Assemblierung schematisch dargestellt. Da die Generierung von \mathbf{K} und \mathbf{M} im Referenztetraeder (lokal) durchgeführt wird, muss eine Vorzeichenkorrektur, welche die tatsächlichen Richtungen der Kanten beschreibt, eingefügt werden. Die Matrix Incident enthält die gesamte, vorzeichenrichtige Zuordnung von lokalen zu globalen Kanten (Inzidenzbeziehung in Abb. 2).

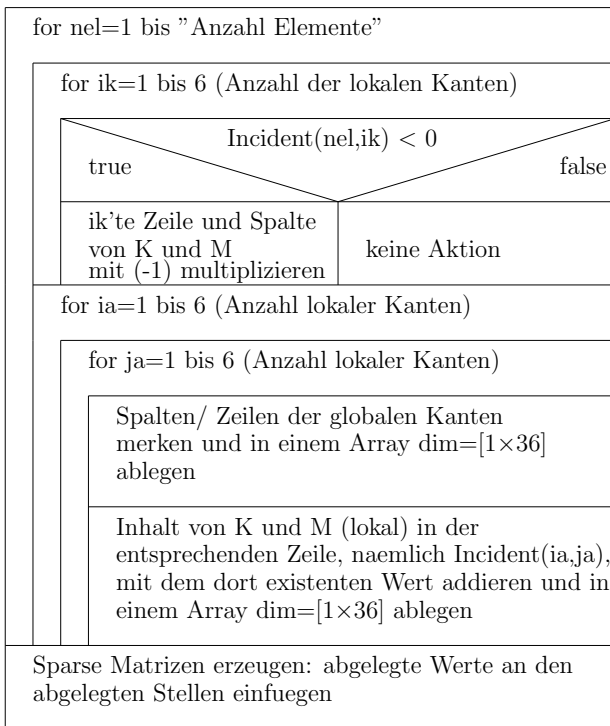


Abbildung 3: Struktogramm, Assembly

D. Berechnung der verallgemeinerten Eigenwertgleichung

Es sollen die 8 niedrigsten Resonanzfrequenzen und damit Moden untersucht werden. Die Eigenwertgleichung (7) kann mit dem *MATLAB* eigenem Eigenwertsolver "eigs" berechnet werden. Da in diesem Projekt PEC-Ränder angenommen werden, haben die Randkanten keine unbekanntenen Werte. Somit kann das Gleichungssystem um genau diese Randkanten reduziert werden. Das wird erreicht, indem bei den globalen Systemmatrizen **K** und **M** die jeweiligen Zeilen und Spalten herausgestrichen werden.

IV. KONVERGENZSTUDIE

Eine Konvergenzstudie trifft eine Aussage bezüglich der Genauigkeit der numerischen Lösung des Verfahrens. Hierzu wird in fortlaufenden Schritten die Gitterauflösung für das Objekt immer weiter verfeinert und für jeden Schritt der Fehler der ermittelten Lösung mit einer bekannten Referenzlösung verglichen. Da wir in unserem Fall stets einen Rundresonator mit Radius 1 m und einer Höhe von 1.3 m als geometrisches Objekt berechnet haben (Abbildung 4), können wir

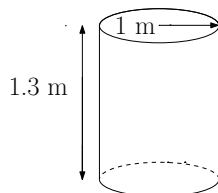


Abbildung 4: Skizze des verwendeten Rundresonators

eine exakte Aussage bezüglich einer Abweichung zwischen numerischer und analytischer Lösung treffen, da für einen

solchen Rundresonator geschlossene analytische Lösungen für Resonanzfrequenzen und Feldverläufe existieren [5]. Für den Rundresonator ergibt sich für die beiden Moden TM_{010} und TM_{011} die jeweiligen Resonanzfrequenzen zu

$$TM_{010} = 114.74257 \text{ MHz} \tag{9}$$

$$TM_{011} = 162.66850 \text{ MHz.} \tag{10}$$

Die Auswahl dieser beiden Moden für die Konvergenzstudie erfolgt unter dem Gesichtspunkt, dass in einer symmetrischen Anordnung wie einen Rundresonator sogenannte *entartete* Moden existieren. Diese Moden besitzen dieselben Resonanzfrequenzen, aber unterschiedliche Feldverläufe. Um aber gleiche Moden bezüglich ihrer Genauigkeit miteinander vergleichen, werden von daher die obigen beiden Moden ausgewählt, da sich diese noch klar von benachbarten Moden in ihrer Resonanzfrequenz trennen lassen. Die Verfeinerung des Gitters für die Konvergenzstudie wird in Abbildung 5 verdeutlicht. Hierbei beträgt die minimale Anzahl der Tetraeder 37 für das

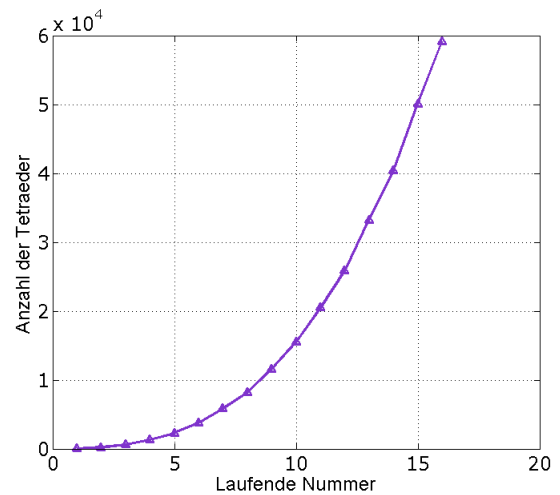


Abbildung 5: Anzahl der Tetraeder pro Verfeinerungsschritt

die erste Diskretisierung und wird bis auf ca. 60000 Tetraeder im 16. und letzten Durchgang verfeinert.

Für jede der Gittergrößen wird nun durch das Programm eine numerische Lösung berechnet und der relative Fehler zwischen dieser Lösung und der exakten analytischen Lösung ausgewertet, siehe Abbildung 6.

Hierbei zeigt sich deutlich, dass mit immer feiner werdender Gitterdiskretisierung, was analog zu einer Minimierung der Kantenlänge der Tetraeder pro Durchlauf ist, der relative Fehler sehr klein wird und mit 2. Ordnung konvergiert. Weiterhin ist zu beobachten, dass der TM_{010} -Mode schneller konvergiert als der höhere TM_{011} -Mode. Dies ist damit zu erklären, dass dieser Mode einen komplexeren Feldverlauf als der Grundmode aufweist und sich somit durch die Ansatzfunktionen nicht so genau approximieren lässt wie der im Feldverlauf relativ lineare TM_{010} -Mode.

V. POSTPROCESSING

In der behandelten verallgemeinerten Eigenwertgleichung (Kap. III-D, werden kantenbezogene Gewichtungsfaktoren berech-

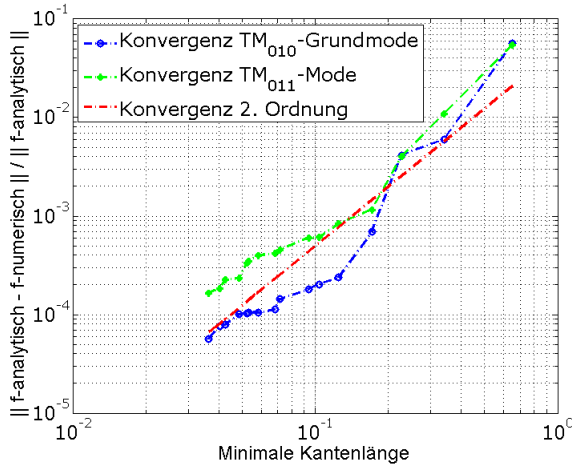


Abbildung 6: Konvergenzstudie des FEM-Lösers

net. Das zur Visualisierung herangezogene Freeware- Programm *Paraview* [4] ist jedoch besonders gut geeignet, um Tetraederobjekte zu interpretieren. Deshalb sollen zur Visualisierung die Feldstärkekomponenten auf den Schwerpunkt des jeweiligen Tetraeders bezogen werden. Die dazu notwendige Formulierung der Ansatzfunktionen ist

$$\vec{w}(S) = \frac{1}{4}(\nabla\lambda_i - \nabla\lambda_j). \quad (11)$$

Den Faktor 1/4 für $\lambda_1 \dots \lambda_6$ kann man sich leicht aus der Definition der Knotenfunktionen herleiten [2]. Die im Bildbereich definierten Whitney-Funktionen aus Abb. 1 werden über folgenden Zusammenhang in den Originalbereich zurücktransformiert [6].

$$\nabla(x, y, z)\lambda_i = J_{\mathcal{F}-1}^T \nabla(\xi, \eta, \zeta)\lambda_i \quad (12)$$

Die einzige Unbekannte $J_{\mathcal{F}-1}^T$ ergibt sich aus der Abbildungsvorschrift der affinen Abbildung \mathcal{F} . Die invertierte und transponierte Jacobimatrix von \mathcal{F} kann direkt aus den lokalen Knotenpunkten ermittelt werden.

$$J_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ y_{21} & y_{31} & y_{41} \\ z_{21} & z_{31} & z_{41} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Diese lokale Transformation, also das Einsetzen von (12) in (11), wird im Hauptprogramm (gesamtes Programm ohne den Teil "Postprocessing") durchgeführt. Das Struktogramm (7) zeigt diese Operation anschaulich. Um letztendlich die Feldstärke pro Tetraeder ermitteln zu können, müssen alle Entwicklungsfaktoren berücksichtigt werden, auch jene, welche im Zuge der Randbehandlung, herausfallen. Die arithmetische Mittelung des Feldes entspricht dann

$$E(s) = \frac{\sum_{i=1}^6 \alpha_i \text{sign}(\text{edge}_i) w_{e,i}}{6}. \quad (14)$$

Diese Mittelung der Feldkomponenten wird im Programmteil *Postprocessing* (siehe Abb. 2) durchgeführt und können dem Programm *Paraview* zusammen mit den Diskretisierungsobjekten (Tetraedern) übergeben werden. Hier sei

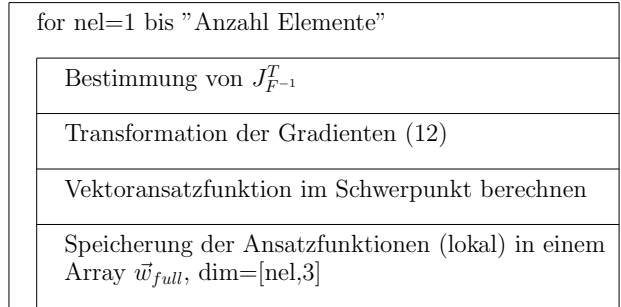


Abbildung 7: Struktogramm, Rücktrafo der Ansatzfunktionen

die z-Komponente des elektrischen Feldes der TM_{010} -Mode gezeigt. Das Rechenetz besteht aus knapp 60.000 Tetraedern.

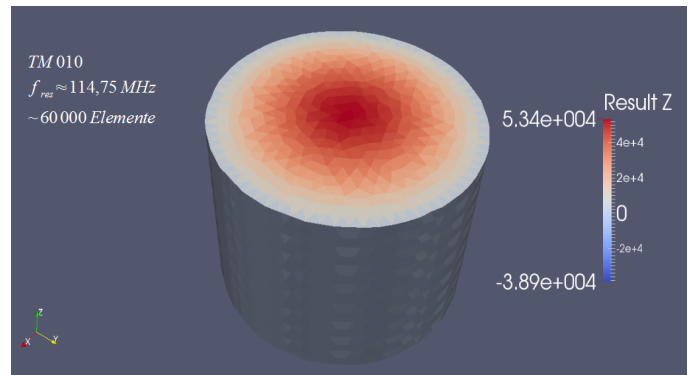


Abbildung 8: z-Komponente der TM_{010} -Mode, *Paraview*

VI. ZUSAMENFASSUNG

Ziel der Projektarbeit war die Implementierung eines FEM-Eigenlösers für Zylinderresonatoren in *MATLAB*. Die Ergebnisse wurden anhand einer Konvergenzstudie über verschiedene Gitterauflösungen validiert und es konnte eine Konvergenz 2. Ordnung gegenüber der analytisch errechneten Moden festgestellt werden. Durch geeignete Transformationen der Whitney-Ansatzfunktionen in Originalkoordinaten sowie einer Mittelung der kantenbasierten Feldlösungen ließ sich eine Visualisierung mittels *Paraview* bewerkstelligen.

Malte Dornieden: Kapitel (I),(II),(IV)

Hannes Borgiel: Kapitel (III),(V),(VI)

LITERATUR

- [1] J.-F. Lee and R.Mitra, "A Note on the Application of Edge-Elements for Modeling Three-Dimensional Inhomogeneously-Filled Cavities," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, pp. 1767–1773, Sep. 1992.
- [2] Prof. Dr. Rolf Schuhmann, "FEM-Kurzversion," Folien, TU Berlin Fachbereich Theoretische Elektrotechnik.
- [3] "MATLAB- The Language of Technical Computing," 2014. [Online]. Available: <http://www.mathworks.de/products/matlab/>
- [4] "The ParaView Website," 2014. [Online]. Available: <http://www.paraview.org>
- [5] C. A. Balanis, *Advanced Microwave Engineering*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 1992, ch. 3.
- [6] Prof. Dr. Rolf Schuhmann, "FE-Felddarstellung," Folien, TU Berlin Fachbereich Theoretische Elektrotechnik.