

Modellierung einer flachen Linse mithilfe einer diskreten Koordinatentransformation

Saud Cindrak, Sebastian Lauck, und Matthias Hochstein

Zusammenfassung—Gekrümmte Bauteile in planaren Prozessen zu realisieren ist sehr schwierig bis unmöglich. Für optische Schaltungen im μm Bereich wäre es beispielsweise von großer Bedeutung Linsen direkt in den Herstellungsprozessen zu integrieren. Mit der Möglichkeit eine planare Linse zu erzeugen, die identische Eigenschaften wie eine konventionelle Linse besitzt, können man die Herstellungskosten drastisch reduzieren. In diesem Paper wird mithilfe einer diskreten Koordinatentransformation ein solcher Ansatz vorgestellt, mit dem eine inhomogene Materialverteilung für eine flache Linse berechnet und anschließend mit der elektromagnetischen Simulationssoftware CST [1] verifiziert wird. Hierbei wird mittels des Space Map Based Material Ansatzes eine flache Linse in CST eingepflegt. Es konnte gezeigt werden, dass die Eigenschaften des elektrischen Felds und des Fernfelds der unterschiedlichen Linsen sich ähnlich verhalten und die verwendete Koordinatentransformation eine Möglichkeit ist die Materialverteilung für eine flache Linse zu bestimmen.

Index Terms—Koordinatentransformation, flache Linse, Space Map Based Material, CST, Matlab.

I. EINLEITUNG

Die diskrete Koordinatentransformation kann zur Dimensionierung von Bauteilen verwendet werden, um Strukturen zu erstellen die einfacher zu integrieren sind. In diesem Paper wird dazu mithilfe eines in Matlab erzeugten Gitters die Materialverteilung für eine flache Linse berechnet, die die Selben Eigenschaften besitzen soll, wie eine konventionelle. Das Gitter stellt hier die Linse dar und dient als Transformationshilfe um eine flache Linse zu erzeugen. Der Theorie nach ist es möglich, dass sich das einfallende und austretende Wellenfeld in beiden Bauteilen identisch verhält. Durch die hier gewählte kreisförmige Oberfläche der konventionellen Linse ergeben sich unterschiedliche Laufzeiten und Brechungswinkel der Wellen. Bei einer flachen Linse ist dieser Effekt nur durch eine entsprechende Variation des Brechungsindex innerhalb des Materials zu erreichen.

S.Lauck

II. KOORDINATENTRANSFORMATION

In diesem Abschnitt wird die zugrunde liegende diskrete Koordinatentransformation entlehnt von [3] erläutert. In Abbildung 1 wird aufgezeigt was die Transformation ermöglicht. Es soll ein Koordinatensystem erzeugt werden, sodass die elektrischen und magnetischen Eigenschaften erhalten bleiben. Dazu wird zuerst ein krummliniges Koordinatensystem (x,y,z) für die konventionelle Linse erstellt und mithilfe einer Transformation in ein kartesisches Koordinatensystem überführt.

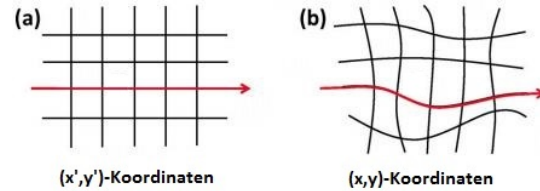


Abbildung 1. Beispiel vom 2-dimensionalen Koordinatensystem zur Veranschaulichung der Koordinatentransformation. In a) ist das kartesische Koordinatensystem (x',y') und in b) ein beliebig krummliniges Koordinatensystem (x,y) dargestellt. x', y' sind Funktionen von x und y . Somit gilt: $x' = x'(x,y)$, $y' = y'(x,y)$, [3]

Die Koordinatentransformation wird aus den Maxwell-Gleichungen im Minkowski-Raum hergeleitet.

Dabei ist $F_{\alpha\beta}$ der Vierer-Vektor für das elektrische Feld und die magnetische Induktion und $G^{\alpha\beta}$ der Vierer-Vektor für das magnetische Feld und die elektrische Flussdichte [2].

Diese bilden sich mit dem Vierer-Vektor $C^{\alpha\beta\mu\eta}$ ineinander wie folgt ab [2]:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\mu\eta} F_{\mu\eta} \quad (1)$$

$C^{\alpha\beta\mu\eta}$ enthält dabei die Informationen über die Permeabilität, die Permittivität und die bianisotropen Eigenschaften [2]. Ist die Transformation zeitinvariant, dann lassen sich die Informationen über Permeabilität und Permittivität aus $C^{\alpha\beta\mu\eta}$ in Matrizen überführen, die wie folgt berechnet werden [3]:

$$\bar{\epsilon}' = \frac{J \bar{\epsilon} J^T}{\det(J)} \quad \bar{\mu}' = \frac{J \bar{\mu} J^T}{\det(J)} \quad (2)$$

J stellt dabei die Jacobi-Matrix, $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \bar{I}$ und $\bar{\mu} = \mu_0 \bar{I}$ die Materialmatrizen dar und \bar{I} ist die Einheitsmatrix.

Wird des Weiteren angenommen, dass die Linse in z -Richtung unendlich ausgedehnt ist, ergibt sich für J :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Handelt es sich bei der einfallenden Welle um eine TM-Welle, so muss nur die Permittivität ϵ'_z für die z -Komponente des elektrischen Feldes berechnet werden.

$$\epsilon'_z = \frac{\epsilon_0}{\det(J)} \quad (4)$$

Da bis jetzt ein einfacher Ausdruck für die Permittivität entstanden ist, muss noch ein geeigneter Ansatz für die Permeabilität gesucht werden, damit diese vernachlässigt werden

kann.

Dazu wird der effektive Brechungsindex n'^2 herangezogen [3].

$$n'^2 = \frac{n'_{xx}n'_{yy}}{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\sqrt{\mu'_{yy}\mu'_{xx}}\varepsilon'_z}{\varepsilon_0\mu_0} \quad (5)$$

Aus Gleichung 2 ergibt sich für $\mu'_{xx}\mu'_{yy}$:

$$\begin{aligned} \mu'_{xx}\mu'_{yy} = \mu_0^2 & \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 \right. \\ & + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 \left. \right] / \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 - 2 \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Wenn $\frac{\partial x'}{\partial y} \simeq 0$ und $\frac{\partial y'}{\partial x} \simeq 0$, dann ergibt sich für $\mu'_{xx}\mu'_{yy} = \mu_0^2$. Da x' und y' Funktionen von x und y sind, können sie umgeschrieben werden zu:

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \simeq 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \simeq 0 \quad (8)$$

Wird das krummlinige Koordinatensystem (x,y) so gewählt, dass x und y orthogonal oder näherungsweise orthogonal aufeinander stehen, ergibt sich für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial y} \simeq 0$ und $\frac{\partial y}{\partial x} \simeq 0$. Damit ergibt sich nach Gleichung für 8 für $\frac{\partial x'}{\partial x} \simeq 0$ und für $\frac{\partial x'}{\partial y} \simeq 0$ und die Permeabilität kann bei der Koordinatentransformation vernachlässigt werden. Mit $\mu'_{xx}\mu'_{yy} = \mu_0^2$ erhält man für den effektive Brechungsindex:

$$n'^2 \simeq \frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\det(J)} = \frac{1}{\frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y}} \approx \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x' \Delta y'} \quad (9)$$

Wobei Δx und Δy die Dimensionen der Zellen im krummlinigen Koordinatensystem und $\Delta x'$ und $\Delta y'$ die Dimensionen der Zellen im kartesischen Koordinatensystem der flachen Linse sind. Somit ist der Brechungsindex unabhängig von μ und es muss für eine TM-Welle allein die Permittivität ε variiert werden.

S.Cindrak

III. GITTERERZEUGUNG UND BERECHNUNG DER PERMEABILITÄTSVERTEILUNG

Damit die Koordinatentransformation durchgeführt werden kann, musste zunächst ein Gitter in der konventionellen Linse erstellt werden, das möglichst den Anforderungen der Orthogonalität nach Gleichungen 7 und 8 entspricht. Dazu wurde mit Hilfe von Matlab eine symmetrische sphärische Linse implementiert. Diese kann in Höhe, Breite und in ihrer Brennweite über den Radius der äußeren Konstruktionkreise variiert werden. Zusätzlich ist die Auflösung, also die Anzahl der Gitterzellen einstellbar.

Ein vollständig rechtwinkliges Gitter in eine sphärische Linse einzufügen ist unmöglich. Um sich daran anzunähern wurden vertikale Kreislinien in äquidistanten Abständen mit Mittelpunkt auf der optischen Achse konstruiert. In horizontale

Richtung wurden Kreise mit Mittelpunkten auf der y-Achse und gleichen Winkelabständen entlang der Konturkreise berechnet. Mit dieser Anordnung wurde jedenfalls auf den Symmetrieachsen der Linse die Orthogonalität sichergestellt.

Anschließend konnte mit Hilfe der berechneten Gitterpunkte und der Umrechnungsformel von Gleichung 9 die Permittivitätsverteilung $\varepsilon(x,y)$ innerhalb der flachen Linsen für jede Gitterzelle bestimmt werden. Weiterhin ist es möglich die Abmaße für die resultierende flache Linse zu variieren.

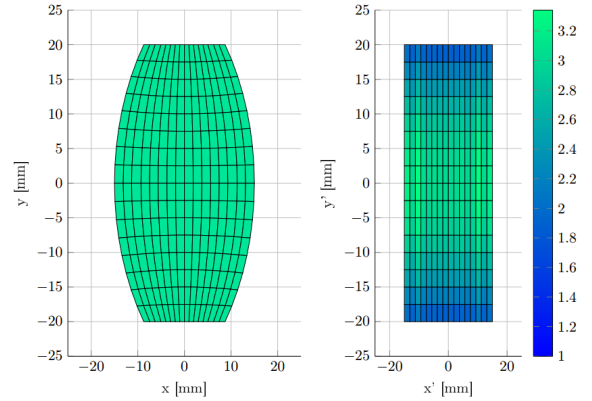


Abbildung 2. Mit Matlab erstellte Gitterstruktur für die sphärische und ihrer zugehörigen flachen Linse. Die Abmaße der sphärischen Linse sind H=40mm, B=15mm, Radius R=35mm und einem $\varepsilon = 3$. Die Gitterzellenanzahl beträgt hier 256. Die flache Linse besitzt die selbe Höhe und Breite bei einem $\varepsilon \in [1, 3.2]$.

In Abbildung 2 sind die konventionelle und die zugehörige flache Linse mit ihrer inhomogenen Materialverteilung abgebildet. Man erkennt hier in der dritten Gitterreihe ein sprunghaft erhöhtes ε , dass physikalisch keinen Sinn ergibt. Bei der Erzeugung des Gitters ist an dieser Stelle der Abstand der vertikalen Gitterlinien aus unersichtlichem Grund nicht äquidistant wie die restlichen zueinander.

S.Lauck

IV. SPACE MAP BASED MATERIAL

Nachdem die Gittererzeugung in Matlab realisiert wurde, muss die Materialverteilung noch in CST integriert werden. Hier bietet CST die Möglichkeit des Space Map Based Material Ansatzes. Mit Matlab wird dafür ein Template erzeugt in dem CST die Gitterpunkte der Gesamtstruktur und die Verteilung der Permittivitätswerte über dieses Gitter übergeben werden. Dieses kann dann über ein Struktur-Makro eingelesen werden. Dazu stehen einige Befehle in der Hilfe zur Verfügung. CST braucht hierfür eine Komponente mit der Gesamtabmessung des im Template übergebenen Gitters und muss innerhalb des Makros eine Default-Permittivität zugeordnet bekommen. Die Materialverteilung wird dann während der Simulation erzeugt und kann danach im Ergebnisordner weiter untersucht werden. Dabei ist ein Unterschied bei der Zuordnung von $\varepsilon(x,y)$ zwischen Matlab und CST zu beachten. Die in Matlab erzeugten Permittivitätswerte sind einer Gitterzelle zugeordnet, was für den Space Map - Ansatz nicht mehr gilt. Hier wird jedem Gitterpunkt ein ε_r zugeordnet.

Fehlende ϵ_r -Werte sind somit über eine Näherung eingefügt worden. Zusätzlich interpoliert CST die Werte zwischen den einzelnen Gitterpunkten linear. Bei relativ großen Gitterzellen und Schwankungen zwischen den ϵ_r -Werten erfolgt somit eine Veränderung der Materialmatrix auf die man als Anwender keinen Zugriff mehr hat. Bei vielen kleinen Zellen schwanken die Materialwerte jedoch weniger stark und die Interpolation spielt eine immer geringere Rolle.

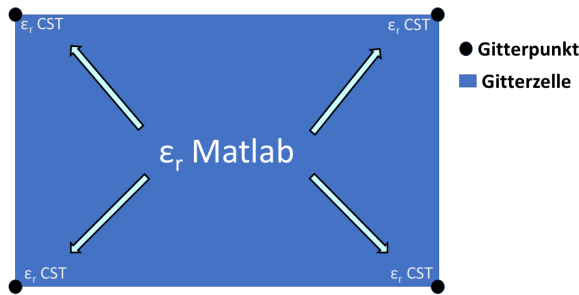


Abbildung 3. Zuordnung des in Matlab berechneten ϵ_r zu den Gitterpunkten in CST

In Abbildung 4 ist diese Materialverteilung dargestellt. Die Ausbreitungsrichtung der Welle ist dabei in X-Richtung. Hier ist deutlich die symmetrische Anordnung der Permittivität zu erkennen, die nach außen zu kleineren ϵ_r geht.

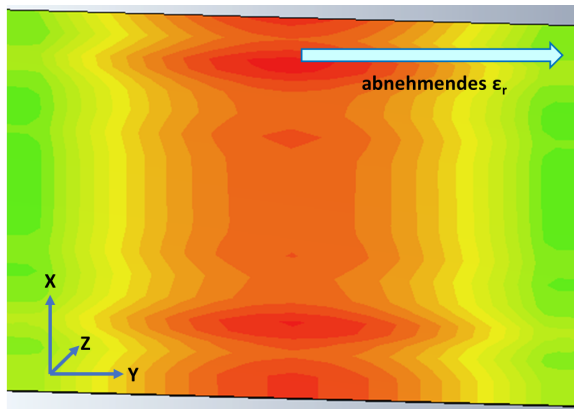


Abbildung 4. Materialverteilung ϵ_r in CST realisiert, (30x40x0.1)µm

M.Hochstein

V. SIMULATION

Als Referenzmodell wurde eine symmetrische konvexe Linse mit einer Höhe von $H=40$ mm und einer Dicke von $B=30$ mm gewählt. Der Radius der Konstruktionskreise ist $R=35$ mm. Die Abmaße der flachen Linse wurden für erste Simulationen entsprechend gleich gewählt. Später wurde die Breite der flachen Linse auf 10 mm verringert und das Ergebnis mit der konventionellen Linse verglichen.

Anfänglich wurde mittels zweier Waveguide - Ports das Übertragungsverhalten in einem Frequenzbereich von 5 GHz bis 70 GHz untersucht, um einen Bereich möglichst guter Fokussierung zu bestimmen. Die Frequenz für die

Verifikation der unterschiedlichen Linsen wurde dann auf 50 GHz festgelegt. Der Fokus wurde zunächst über den Betrag des elektrischen Feldes auf der optischen Achse der Linse bestimmt. An dem Punkt der höchsten Feldstärke wurde dann ein Dipol platziert. Dieser erzeugt bei richtiger Fokussierung und Dimensionierung der flachen Linse eine ebene Welle auf der gegenüberliegenden Seite. Diese ebene Welle wird dann über das Fernfeld weiter analysiert.

S.Lauck

VI. AUSWERTUNG

In Tabelle I werden die verschiedenen Linsen mit ihren quantitativen Eigenschaften aufgelistet. Es werden die konvexe Linse mit zwei per Hand eingetragenen Werten (Hand 1 & 2), sowie mittels des Space Map - Ansatzes (SMBA 1-3) verglichen. Zum einen werden die Orte des Fokus (x_f), der Winkel der Hauptkeule (ϕ) und die Ausprägung der Hauptkeule (Mag. in dBi) gegenübergestellt. In der Zeile X sind die Abmessungen der Linsen an ihrer dicksten Stelle in mm angegeben.

Für die ersten Simulationen wurde eine flache Linse mit

Tabelle I
VERGLEICH ZWISCHEN DEN VERSCHIEDENEN SIMULIERTEN LINSEN

	konvex	Hand 1	Hand 2	SBA 1	SBA 2	SBA 3
X	30	30	10	30	30	10
ϵ_r	3	3 - 1.5	10.5 - 5	3 - 1.5	3 - 1	10.5 - 5
x_f	27	25	22	38	22	24
ϕ	7	6.9	9	7.4	8.2	8.4
Mag.	-5.5	-5.2	-9.1	-6.7	-5	-6.4
Cells	-	36	36	36	256	256

ähnlichen Abmessungen zur konventionellen Linse gewählt. Bei 36 Gitterzellen ergeben sich nur geringfügig abweichende Werte des Fokus und der Fernfeldcharakteristiken. Der Fokus verschiebt sich leicht zur Linse hin und es ergibt den Anschein, dass die flache Linse eine ebene Welle mit geringerer Streuung erzeugen kann. Der Winkel ϕ , der innerhalb der Hauptkeule aufspannt wird, wird kleiner und es wird mehr Leistung in Richtung der Hauptkeule übertragen. Die Variation der Permittivität ergibt sich von $\epsilon_r = 3$ bis $\epsilon_r = 1.5$. Dies ergibt Sinn, da die kürzere Laufzeit am oberen und unteren Rand der flachen Linse durch ein kleineres ϵ_r kompensiert werden muss, sodass die Welle dort nicht so abgebremst wird wie im Kern der Linse. Der gleiche Wert von ϵ_r im Kern stimmt dann auf Grund der gleichen Abmessungen mit der konvexen Linse überein. Nachdem gezeigt wurde, dass für ähnliche Abmessungen die Transformation an sich funktioniert, ist es auch von Interesse wie sich die Eigenschaften bei noch kleineren Abmessungen ändern. Dazu wurde eine Dicke von 10 mm ausgewählt (Tabelle I: Hand 2). Hier ist zusehen, dass auf Grund der schmalen Abmessung die Permittivitätswerte zum Teil bis auf 10 steigen. Zusätzlich wird das Fernfeld schlechter. Die ebene Welle verschmiert und es gelangt weniger Leistung durch die Linse. Die höheren ϵ_r -Werte erzeugen höhere Reflexionen an den Grenzschichten.

Bisher wurden die einzelnen Gitterzellen per Hand eingetragen. Da dies für höhere Gitterzellen schnell sehr zeitaufwendig wird, wurde eine Funktion von CST verwendet, die die Materialverteilung automatisch übernehmen kann (siehe Abschnitt IV). Zum Vergleich wurde eine flache Linse identisch mit der Ersten untersuchten gewählt (Hand 1). Hier zeigen sich jedoch deutliche Unterschiede. Der Fokus ist um 13 mm verschoben und auch das Fernfeld ist schlechter geworden. Dies liegt an der erklärten Interpolation des Space Map - Ansatzes. Damit dieser weniger Einfluss auf die Simulation hat wurde die Anzahl von 256 Gitterzellen gewählt (SMBA 2). Hier zeigen sich ähnliche Ergebnisse wie bei der ersten Transformation. Der Fokus ist zwar noch verschoben, jedoch deutlich näher am Original. Die Hauptkeule ist breiter geworden, wobei die abgestrahlte Leistung in Hauptkeulenrichtung jedoch der Leistung der konventionellen Linse gleicht.

A. Fokus Variation

Um den Fokus der Linse noch genauer einzugrenzen wurde die Dipolquelle auf der optischen Achse variiert. So konnte festgestellt werden, dass sich die Leistung in Richtung der Hauptkeule schon bei wenigen mm stark verändert. In Abbildung 5 sind bei unterschiedlichen Fokussen das Fernfeld aufgezeigt. Sowohl in der Amplitude der Hauptkeule als auch in den Nebenkeulen zeigen sich die Unterschiede für die Variation des Fokus.

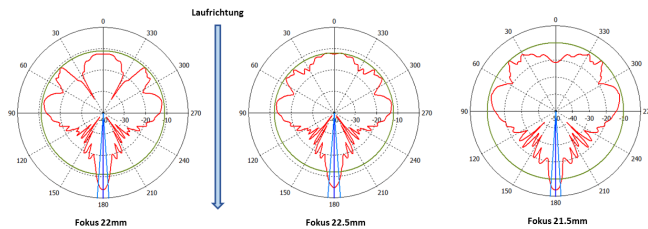


Abbildung 5. Vergleich von Fernfeldern der flachen Linse mit 256 Gitterzellen. Die Fokusse wurden dabei auf der optischen Achse variiert.

In Tabelle II sind die simulierten Werte angegeben. Hier zeigt sich, dass der Fokus für die flache Linse mit einer Breite von 30 mm bei ca. 22 mm liegt. Bei einer etwas kleineren Distanz werden die Werte sogar besser, dafür steigt aber die Leistung der Nebenkeulen an, was für eine Verschlechterung der ebenen Welle spricht.

Tabelle II
VERGLEICH VERSCHIEDENER FOKUSSE

	22 mm	22.5 mm	21.5 mm
ϕ	8	8.4	7
Mag.	-4	-5	-3.6

M.Hochstein

VII. FEHLERANALYSE

Abschließend werden die durch die Koordinatentransformation erzeugten Abweichungen nochmals zusammengefasst.

- 1) Durch die Diskretisierung der Linse entstehen Diskrepanzen zur theoretisch exakten Umrechnung. Indem die Auflösung erhöht wird kann dieser Fehler minimiert werden. Welche Anzahl von Gitterzellen schließlich gewählt wird, hängt von der tatsächlichen Realisierung der flachen Linse ab.
- 2) Wie in Abschnitt III erwähnt ist die Orthogonalität des Gitters nicht vollständig gegeben, was zu einem nicht vernachlässigbaren ortsabhängigem $\mu(x, y)$ führt. Eine komplexere Gitterstruktur, die die Bedingung besser erfüllt ist vorstellbar.
- 3) Das in Matlab implementierte Gitter erzeugt teilweise nicht äquidistante Kreislinien, was zu einer kleinen unregelmäßigen ϵ Verteilung führt. Dieser Fehler kann durch Überarbeitung des Matlab Codes behoben werden.
- 4) Die Berechnung mithilfe des Space Map Based Material erzeugt keine diskreten Zellen mit dem dazugehörigen ϵ_r sondern interpoliert zwischen den Punkten, was zu einer Verfälschung der Materialmatrix führt. Diese Abweichung kann entweder mit einer höheren Auflösung gering gehalten oder mit einem aufwendigerem VBA-Code umgangen werden.

S.Cindrak

VIII. ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wurde mittels einer diskreten Koordinatentransformation aus einer konvexen Linse mit einem einheitlichen Material eine inhomogene Permittivitätsverteilung für eine flache Linse berechnet. Mithilfe dieser konnte eine flache Linse in CST simuliert werden und mit der Simulation einer konventionellen Linse verglichen werden. Neben den nötigen Näherungen bei der Koordinatentransformation und auf Grund von Zeitmangel bei der Implementierung der Gittererzeugung und dem Einlesen der Werte in CST ist eine exakte Kopie des Wellenbildes der ursprünglichen Linse nicht gelungen. Die Ergebnisse lassen sich somit noch verbessern. Die grundlegenden Eigenschaften wie Fokus und Fernfeld der Linsen ähneln sich dennoch stark. Es konnte somit gezeigt werden, dass die Transformation prinzipiell eine gute Möglichkeit ist, die nötige Materialverteilung für eine flache Linse zu bestimmen.

S.Lauck

LITERATUR

[1] CST - Computer Simulation Technology. <https://www.cst.com>. Version: 2016

[2] SCHURIG, D. ; PENDRY, J. B. ; SMITH, D. R.: Calculation of material properties and ray tracing in transformation media. In: *Opt. Express* 14 (2006), Oct, Nr. 21, 9794–9804. <http://dx.doi.org/10.1364/OE.14.009794>. – DOI 10.1364/OE.14.009794

[3] TANG, W. ; ARGYROPOULOS, C. ; KALLOS, E. ; SONG, W. ; HAO, Y. : Discrete Coordinate Transformation for Designing All-Dielectric Flat Antennas. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 58 (2010), Dec, Nr. 12, S. 3795–3804. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2010.2078475>. – DOI 10.1109/TAP.2010.2078475. – ISSN 0018–926X