

# 3D FE-Analyse eines magnetoquasistationären Problems im Frequenzbereich

Elias Büchner, Philipp Godbersen und Andre Klunker

**Zusammenfassung**—In dieser Arbeit wird ein Ansatz zur Berechnung des magnetoquasistationären Problems im Frequenzbereich unter Anregung vorgestellt. Ausgehend von einer Gittergenerierung in Gmsh wird in MATLAB eine räumliche Diskretisierung mittels Finite-Elemente-Methode (FEM) auf Basis von Kantenelementen erster Ordnung durchgeführt. Eine Herausforderung stellt hierbei die Implementierung der Anregung dar, welche volumenbasiert aufgebracht wird. Philipp

## I. EINFÜHRUNG

**Z**IEL dieser Arbeit ist die Berechnung eines magnetoquasistationären Problems unter Anregung mittels eines selbst entwickelten MATLAB [1] FEM-Codes zum besseren Verständnis der Elektrodynamik. Als erster Ansatz dient eine bestehende Arbeit in der eine dreidimensionale Kavität mit der FEM modelliert wird [2]. Die Autoren verwenden für die Berechnung der homogenen Wellengleichung Kantenelemente und beschreiben den Aufbau der zugehörigen Matrizen für den Lösungsansatz. Der wesentliche Unterschied zu dem hier im Frequenzbereich betrachteten Problem ist, dass diese keine Anregung betrachten und somit ein Eigenwertproblem lösen.

Als neuer Beitrag wird in der vorliegenden Arbeit eine Anregung des Systems implementiert. Dazu werden in Abschnitt II zunächst die Gleichungen in das benötigte Format gebracht und die Diskretisierung mit der FEM erläutert.

Zur Implementierung (Abschnitt III) werden geeignete Rechengitter erstellt (III-A), wozu das freie Programm Gmsh verwendet wird [3]. Der Fokus liegt zunächst auf der erfolgreichen Umsetzung, so dass nur einfache Geometrien betrachtet werden. Zur späteren qualitativen Beurteilung bietet sich dabei ein einfacher Rundleiter an. Eine Schemadarstellung ist in Abb. 1 zu finden. Hervorzuheben ist hier der Ansatz zur Implementierung der Anregung im Volumen, welche auf einer topologisch definierten Trennung des Rundleiters in angeregte (grau) und nicht angeregte Teilvolumina basiert.

Darauf folgt die Implementierung in MATLAB (III-B) sowie zum Vergleich mit bereits vorhandenen FEM-Lösern eine Implementierung in FEniCS [4] (III-C). Dies stellt sehr leistungsfähige Löser über ein Python Frontend bereit. Die so gewonnenen Ergebnisse werden in Abschnitt IV thematisiert.

Philipp

## II. THEORETISCHE VORBETRACHTUNGEN

Grundlage zur Berechnung stellen die MAXWELLSchen Gleichungen in differentieller Form dar, welche durch Vernachlässigung der Verschiebungsstromdichte in die magnetoquasistationäre Formulierung überführt werden [5, S. 17].

Andre

### A. Gleichungen und Randbedingungen

In den Feldgrößen  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  und  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$  im Zeitbereich ausgedrückt lauten die für die Magnetoquasistationarität wesentlichen MAXWELL-Gleichungen

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{J}}, \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Hierbei ist  $\mu_0 \in \mathbb{R}^+$  die magnetische Vakuumpermeabilität. Im Folgenden werden die Gln. (1) im Frequenzbereich ( $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ ), mit  $\omega$  als Kreisfrequenz, betrachtet. Zudem werden das Vektorpotential  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$  über  $\tilde{\mathbf{B}} := \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$  und das skalare Potential  $\phi$ , definiert als  $\nabla \phi = \tilde{\mathbf{E}} + j\omega \tilde{\mathbf{A}}$ , eingeführt. Hierbei wird die COULOMB-Eichung verwendet. So entsteht die partielle Differentialgleichung der Form

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + j\omega \mathbf{A} = \mathbf{J}_{\text{src}} - \sigma \nabla \phi, \quad (2)$$

wobei Größen ohne Tilden rein ortsabhängige Feldgrößen (Phasoren) kennzeichnen. Hierbei ist  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  die elektrische Leitfähigkeit. Die Quellstromdichte  $\mathbf{J}_{\text{src}}$  wird in einem Volumen am Rand von  $\Omega_1$  vorgegeben. Der Rand des Rechengebietes, welches die den Leiter umgebende Luft einschließt ist perfekt leitend (PEC, vgl. Abb. 1).

Um die für die Diskretisierung mittels FEM notwendige schwache Formulierung zu erhalten, wird Gl. (2) mit der Testfunktion  $\delta \mathbf{A}$  skalar multipliziert und über das Rechengebiet  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  integriert. Nach geeigneter Umformung entsteht

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\nabla \times \delta \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV + & \quad (I) \\ \dots j\omega \int_{\Omega} \delta \mathbf{A} \cdot \sigma \mathbf{A} dV & \quad (II) \\ = \int_{\Omega} \delta \mathbf{A} \cdot (\mathbf{J}_{\text{src}} - \sigma \nabla \phi) dV. & \quad (III) \end{aligned} \quad (3)$$

Elias

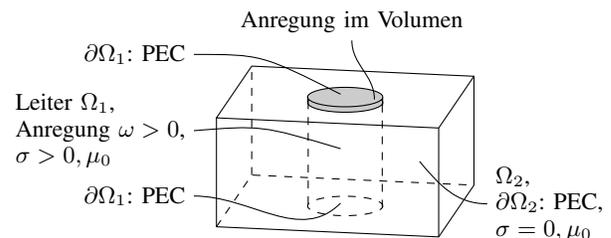


Abbildung 1. Schemadarstellung des untersuchten Systems

**B. Diskretisierung mittels Finite-Elemente-Methode (FEM)**

Die Ortsdiskretisierung der partiellen Differentialgleichung erfolgt durch die FEM auf Basis der schwachen Formulierung (3). Zunächst soll auf die verwendeten Ansatzfunktionen eingegangen werden. Im Anschluss wird die diskrete Form vorgestellt.

1) *Kantenelemente erster Ordnung:* Zur Diskretisierung der schwachen Formulierung mithilfe der FEM nach dem GALERKIN-Ansatz werden Kantenelemente erster Ordnung<sup>1</sup> verwendet. Im Gegensatz zu knotenbasierten Elementtypen wie den LAGRANGE-Elementen, die jedem der vier Knoten eines Tetraeders jeweils drei Komponenten des gesuchten Vektorfeldes in einer kartesischen Basis zuordnen, wird hier jeder der sechs Kanten eines Tetraeders ein Vektorfeld zugeordnet.

Durch die Reduktion von zwölf auf sechs Freiheitsgrade in einem Tetraeder werden Sprünge von Feldgrößen in Normalenrichtung zugelassen. Es kann gezeigt werden, dass die approximative Lösung der Wellengleichung mit LAGRANGE-Elementen zu unphysikalischen Lösungen führt [6]. Ferner wird die Einhaltung topologischer Konsistenzbedingungen der Näherungslösung durch die *Exact-Sequence*-Eigenschaft sichergestellt [7]. Es lassen sich zahlreiche weitere Vorteile dieses Elementtyps für die Simulation elektromagnetischer Wellenprobleme aufzählen [8].

Für Kantenelemente erster Ordnung hat das darzustellende Vektorfeld  $\mathbf{A}$  innerhalb eines Tetraeders die Gestalt

$$\mathbf{A}_{\text{Tet}} := \sum_{i < j=2}^{j=4} A_{ij} \mathbf{w}_{ij}, \tag{4}$$

wobei das über die baryzentrischen Funktionen  $\lambda_i$  definierte Vektorfeld

$$\mathbf{w}_{ij} := \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i \tag{5}$$

der Kante zwischen Knoten  $i$  und Knoten  $j$  zugeordnet ist. Zur Veranschaulichung sei auf Abb. 2 verwiesen, in welcher beispielhaft das Vektorfeld  $\mathbf{w}_{23}$  dargestellt ist.

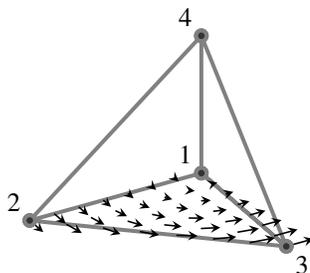


Abbildung 2. Kantenelemente – Darstellung des Vektorfeldes  $\mathbf{w}_{23}$

2) *Räumliche Diskretisierung:* Eine Diskretisierung mit dem GALERKIN-Ansatz, also der Darstellung sowohl des gesuchten Feldes als auch der Testfunktionen mit Hilfe der Kantenvektorfelder in Gl. (5) liefert nach Einsetzen in die schwache Formulierung in Gl. (3):

$$(\mathbf{K} + \omega \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{b}. \tag{6}$$

<sup>1</sup>auch NÉDÉLEC-Elemente oder WHITNEY-Elemente genannt

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  entsteht aus Zeile (I), die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  aus Zeile (II) und die rechte Seite  $\mathbf{b}$  aus Zeile (III) in Gl. (3) durch analytische Berechnung der auftretenden Integrale [2]. Die Systemmatrix  $\mathbf{K} + \omega \mathbf{M}$  ist dünnbesetzt und HERMITESch. Der Lösungsvektor  $\mathbf{u}$  enthält die Koeffizienten der Ansatzfelder nach Gl. (5) für jede Kante des Gitters, sodass sich die gesamte Lösung aus mit den entsprechenden Koeffizienten aus  $\mathbf{u}$  gewichtete Summe der Ansatzfelder über alle Kanten bildet. Andre

**C. Skin-Effekt**

Der Skin-Effekt, auch genannt Stromverdrängungseffekt, beschreibt das Phänomen, dass bei einem bestimmten Abstand vom Leiterrand aus gemessen die Stromdichte auf das  $1/e$ -fache ihres Betrags am Außenrand abfällt [9]. Hierbei wird die Skin-Eindringtiefe  $\delta := \sqrt{2/\sigma\mu_0\mu_r\omega}$  als charakteristische Größe. Elias

**III. IMPLEMENTIERUNG**

Strukturell lassen sich im vorliegenden Projekt drei Arbeitsbereiche identifizieren, welche einander teils bedingen. Zunächst erfolgt die *Gittergenerierung* mit anschließender geeigneter Formatierung (s. Abschnitt III-A). Hier werden topologische Informationen gespeichert, die beispielsweise zur Implementierung der Anregung oder der Randbedingungen wichtig sind. Darauf aufbauend können *FE-Matrizen und rechte Seite* in MATLAB aufgestellt werden (s. Abschnitt III-B). Parallel lässt sich dasselbe Gitter zur Berechnung von *Vergleichslösungen* mit FEniCS verwenden (s. Abschnitt III-C). Abb. 3 stellt die Vorgehensweise in einem Flussdiagramm dar. Andre

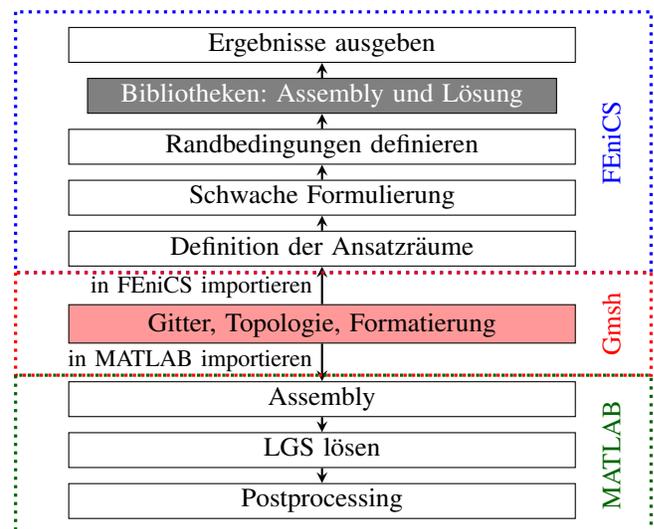


Abbildung 3. Flussdiagramm über Arbeitsschritte bei der Simulation

**A. Gittergenerierung**

Um Berechnungen durchzuführen muss zunächst die gewählte Geometrie (Abschnitt I) umgesetzt und ein darauf basierendes Rechengitter erstellt werden. Hierzu wird das freie

Programm Gmsh verwendet, das insbesondere für einfache Geometrien eine schnelle Modellierung erlaubt. Dies ist in Abb. 3 im Flussdiagramm dargestellt. Das generierte Rechengitter lässt sich in Form einer ASCII *.msh*-Datei für die weitere Verwendung in MATLAB speichern.

In einem zweiten Schritt werden die Rohdaten des Rechengitters aus der Datei in MATLAB importiert. Die Daten bestehen aus einer Auflistung aller Punkte mit ihren jeweiligen Koordinaten sowie verschiedenen Listen von *elements*. Darunter fallen vor allem die Tetraederelemente als Liste der zu einem Element gehörigen Punkte. Weiterhin schließen die *elements* wenn Oberflächen der Geometrie markiert wurden auch eine Liste der markierten Dreieckselemente mit ihren dazugehörigen Punkten sowie dem jeweiligen *tag* ein. Insbesondere gehört dazu allerdings nicht eine Liste *aller* Dreieckselemente der Tetraeder. Die *elements* werden in MATLAB importiert und zur weiteren Verwendung im FEM-Code aufbereitet. Zwar sind die Zuordnungen der Elemente zu Punkten bekannt, es müssen allerdings zusätzlich noch Oberflächen und Kanten, sowie deren Zugehörigkeiten zueinander bestimmt werden.

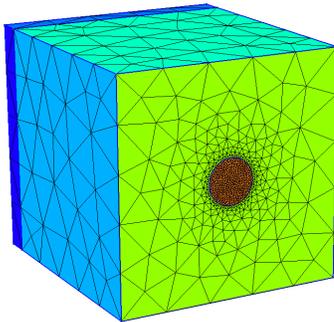


Abbildung 4. Verwendetes Rechengitter

Der letzte Schritt ist die Zuordnung der in Gmsh vorgegebenen topologischen Informationen. Im Fall der Volumenmarkierungen lässt sich dies leicht aus der ausgegebenen Datei entnehmen. Zusätzlich werden für die Umsetzung der Randbedingungen noch die in Gmsh markierten Flächen benötigt. Dies ist mit erhöhtem Aufwand verbunden da keine sofortige Zuordnung zu den aus der Gmsh-Datei extrahierten Tetraederflächen möglich ist. Es müssen die in MATLAB zu markierenden Tetraederflächen aus der Liste aller Flächen des Rechengitters gesucht werden. Für sehr große Rechengitter könnte dies ein begrenzender Faktor sein. Philipp

### B. Implementierung in MATLAB

Das Aufstellen der Systemmatrix  $\mathbf{K} + \omega\mathbf{M}$  (vgl. Gl. (6)) für ein importiertes Gitter erfolgt in MATLAB auf Basis eines am Fachgebiet entwickelten Programms zur Simulation der anregungsfreien Wellengleichung nach [2]. Im ersten Schritt erfolgt die Vektorisierung des vorliegenden Quellcodes. Weiterhin erfolgt eine Erweiterung des Quellcodes durch Verwendung der bei der Gittergenerierung hinterlegten topologischen Informationen, um verschiedene Materialien wie Luft und Leiter zu realisieren, Randbedingungen zu formulieren, und die Anregung im Volumen zu implementieren (s. Abb. 1).

Knoten im Inneren	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$	$\alpha_{14}$	$\alpha_{23}$	$\alpha_{24}$	$\alpha_{34}$
1	-1	-1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	0	-1	0
3	0	1	0	1	0	-1
4	0	0	1	0	1	1

Tabelle I  
KOEFFIZIENTEN ZUR DARSTELLUNG DER ANREGUNGSSTROMDICHTE IN JEDEM ELEMENT

Die Anregungsstromdichte  $\mathbf{J}_{src}$  ist in jedem Element, das mindestens eine Randfläche am Leiterrand hat verschieden von null und zeigt homogen verteilt in Leiterrichtung. In den entsprechenden Elementen wird hierzu wird die Stromdichte als Linearkombination der Kantenansatzfelder nach Gl. (5) dargestellt. Dabei wird ausgenutzt, dass die Gradienten der baryzentrischen Funktionen  $\lambda_i$  jeweils senkrecht auf der dem Knoten  $i$  gegenüberliegenden Tetraederfläche stehen. Der Normierungsfaktor  $3V$ , wobei  $V$  das Volumen des Tetraeders ist, stellt dann die korrekte Größe der Stromdichte sicher. Zusammengefasst ergibt sich folgende Darstellung für die Anregungsstromdichte:

$$\mathbf{J}_{Tet} = J_a 3V \sum_{i < j=2}^4 \alpha_{ij} \mathbf{w}_{ij}, \quad (7)$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_{ij}$  gemäß Tab. I gewählt werden. Die Größe  $J_a$  ist hierbei der Betrag der vorgegebenen Stromdichte. Wird die Darstellung in Gl. (7) in der schwachen Formulierung in Gl. (3) genutzt, so ergibt sich die rechte Seite in Gl. (6), welche direkt während des Matrizen-Assembly aufgestellt werden kann. Andre

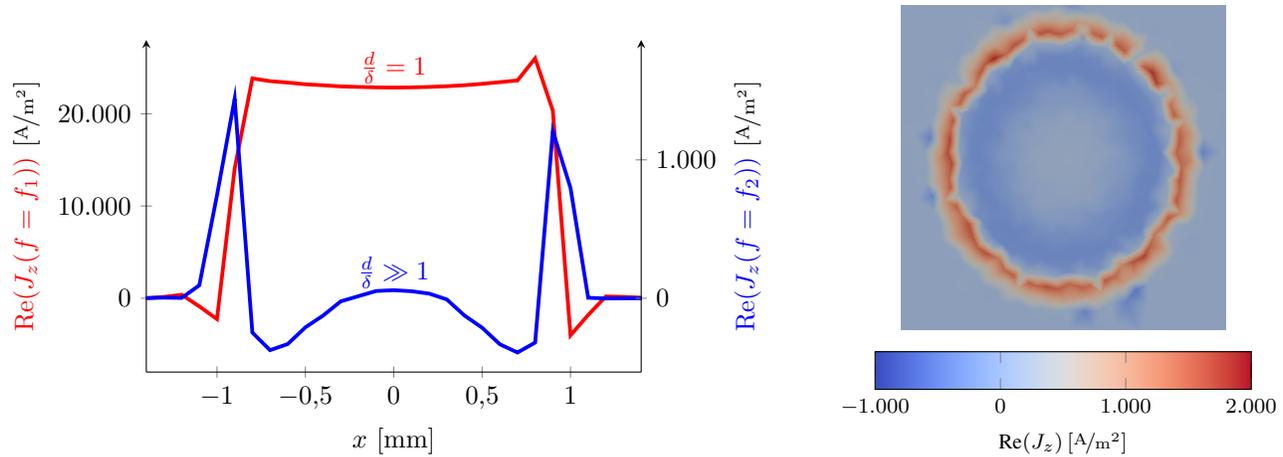
### C. Umsetzung in FEniCS

FEniCS ist eine Open-Source-Software-Bibliothek, zur automatisierten Lösung schwacher Formulierungen mithilfe der FEM. Im Folgenden wird das System aus Abb. 1 betrachtet. Das in Gmsh erstellte Rechengitter (s. Abb. 4) wird in FEniCS importiert, wobei auch hier auf die topologischen Informationen zurückgegriffen werden kann. Als Elemente werden die in Abschnitt II-B diskutierten NÉDÉLEC-Elemente verwendet, welche in FEniCS bereits implementiert sind. In FEniCS muss nur die schwache Formulierung angegeben werden, die Bildung der Systemmatrizen (s. Gl. (6)) erfolgt automatisch. Eine Besonderheit ist, dass hier getrennt für Real- und Imaginärteil gearbeitet werden muss, da FEniCS keinen Datentyp für komplexen Zahlen unterstützt. Hierbei muss auf die korrekte Umsetzung des Standardskalarproduktes für komplexe Funktionen geachtet werden. Elias

## IV. ERGEBNISSE UND BEWERTUNG

### A. Ergebnisse des MATLAB-Programms

Leider können keine zufriedenstellenden Ergebnisse mit Hilfe des MATLAB-Programms bestimmt werden. Die Näherungslösung für das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  weist wider Erwar- ten keine klare Ausrichtung entlang des Leiters auf sondern wirkt in der Orientierung beinahe verrauscht. Die Konditionszahl der Systemmatrix  $\mathbf{K} + \omega\mathbf{M}$  ist mit Größenordnungen von



(a) Reelle  $z$ -Komponente der Stromdichte  $\mathbf{J}$  über den Zylinderquerschnitt  $x$  für zwei verschiedene Frequenzen  $f_1 = 7 \cdot 10^3 / (2\pi)$  Hz und  $f_2 = 8 \cdot 10^5 / (2\pi)$  Hz, der Durchmesser des Leiters ist  $d = 2$  mm

(b) Querschnitt des Leiters,  $z$ -Komponente der reellen Stromdichte bei der Frequenz  $f = 8 \cdot 10^5 / (2\pi)$  Hz

Abbildung 5. Simulationsergebnisse mit FEniCS des Systems aus Abb. 1 – Postprocessing mit Paraview [10]

etwa  $10^{10}$  sehr groß und erklärt den unphysikalischen Charakter der Lösung. Da die Systemmatrix wie erwartet HERMITESCH und dünnbesetzt ist, wird nicht davon ausgegangen, dass es sich um einen groben Implementierungsfehler im Assembly handelt. Die zuvor angesprochene Berechnung mit FEniCS arbeitet mit exakt derselben schwachen Formulierung aus Gl. (3) unter Nutzung derselben Ansatzfunktionen und liefert zufriedenstellende Ergebnisse. Diese Tatsache erschwert es, Vermutungen für Fehlerquellen und geeignete Lösungsansätze aufzustellen. Eine lange Fehlersuche unter zusätzlicher Berücksichtigung anderer Programmelemente wie dem Postprocessing oder der Implementierung von Randbedingungen und Anregung konnte die Fehlerquelle nicht aufdecken. Andre

### B. Ergebnisse der Simulation mit FEniCS

Für zwei verschiedene Anregefrequenzen ist in Abb. 5a die  $z$ -Komponente der reellen Stromdichte über dem Leiterquerschnitt  $x$  dargestellt. Der Verlauf ist unsymmetrisch, da das Rechengitter unsymmetrisch ist. In Abb. 5b ist der Querschnitt des Zylinders aus Abb. 1 dargestellt. Der Skin-Effekt (s. Abschnitt II-C) ist erkennbar. Die Divergenz des Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  und der Stromdichte  $\mathbf{J}$  integriert über das Rechenggebiet liegt unterhalb der Maschinengenauigkeit, sodass hier von physikalischer Konsistenz ausgegangen werden kann. Elias

## V. FAZIT

Offensichtlich zeigt das Thema noch viel Potential für weitere Untersuchungen. Da trotz erfolversprechenden Ansatzes eine Berechnung in MATLAB zu keinen sinnvollen Ergebnissen führte, sollte dieser Bereich noch detaillierter betrachtet werden. Dabei ist vor allem eine genauere Betrachtung der Massen- und Steifigkeitsmatrizen sowie der rechten Seite im Vergleich zu bestehenden, zum Beispiel aus FEniCS interessant. Weiterhin könnte als Ansatz eine gekoppelte Lösung der LAPLACE-Gleichung für das skalare Potential  $\phi$  gewählt werden.

Beim Import des Rechengitters ließe sich eine Beschleunigung der Verarbeitung erzielen, insbesondere mit Hinblick auf die Verwendung von komplexeren bzw. feineren Gittern. Für die Durchführung von Konvergenzstudien ist dies eine Voraussetzung.

Die Rechnung in FEniCS erzielt qualitativ physikalisch sinnvolle Ergebnisse. Hier wäre eine genauere Untersuchung in Hinblick auf quantitative Ergebnisse interessant, insbesondere im Vergleich zu bekannten analytischen Ergebnissen oder Berechnungen mit kommerzieller Software.

Andre, Elias und Philipp

## LITERATUR

- [1] MATLAB, version 7.10.0 (R2010a). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010.
- [2] J.-F. Lee und R. Mittra, „A note on the application of edge-elements for modeling three-dimensional inhomogeneously-filled cavities,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, Bd. 40, Nr. 9, S. 1767–1773, 1992.
- [3] C. Geuzaine und J.-F. Remacle, „Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 79, Nr. 11, S. 1309–1331, 2009.
- [4] A. Logg, K.-A. Mardal, G. N. Wells *et al.*, *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012.
- [5] S. Koch, „Quasistatische Feldsimulationen auf der Basis von Finiten Elementen und Spektralmethoden in der Anwendung auf supraleitende Magnete,” Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2009.
- [6] D. Sun, J. Manges, X. Yuan, und Z. Cendes, „Spurious modes in finite-element methods,” *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, Bd. 37, Nr. 5, S. 12–24, 1995.
- [7] A. Bossavit, „Whitney forms: A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism,” *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews)*, Bd. 135, Nr. 8, S. 493–500, 1988.
- [8] J. Webb, „Edge elements and what they can do for you,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, Bd. 29, Nr. 2, S. 1460–1465, 1993.
- [9] J. Mühlethaler, „Modeling and multi-objective optimization of inductive power components,” Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 20217, 2012.
- [10] J. Ahrens, B. Geveci, und C. Law, „ParaView: An End-User Tool for Large-Data Visualization,” in *The Visualization Handbook*. Academic Press, 2005, Kap. 36.