

Implementierung eines digitalen autoregressiven Filters

Philippe Nguemo

Zusammenfassung—Es wird ein autoregressiver (AR) Filter für die Prädiktion des Verlaufes und die Spektralschätzung eines (harmonisch gedämpften) abgebrochenen Zeitsignals untersucht, gerechnet, implementiert und optimiert. Dazu wird zuerst die Theorie (System und Signal Theorie, nicht lineare Optimierung) analysiert und das Ganze anschließend im Matlab implementiert. Zur Bewertung der Ergebnisse werden sowohl künstliche, als auch realistische Signale benutzt.

Index Terms—AR-Filter, Diskrete Fourier Transformation (DFT), Prädiktion, Matlab, Optimierung, Spektralschätzung, Abgebrochene Zeitsignale

I. EINFÜHRUNG UND MOTIVATION

ES geht in diesem Projekt um die (zeitdiskrete elektromagnetische) Feldsimulation resonanter Strukturen, deren Feldkomponenten lokal an einer Gitterkante aufgezeichnet werden. Die Simulationsmethode ist die Finite Integrationstechnik (FIT). Die Berechnung solcher Signale bis zum kompletten Abklingen dauert sehr lange auf Grund hoher Güten. Sollte man vorher die Simulation abbrechen, würde man dann ein ungenaues Spektrum erhalten (siehe Abb. 1).

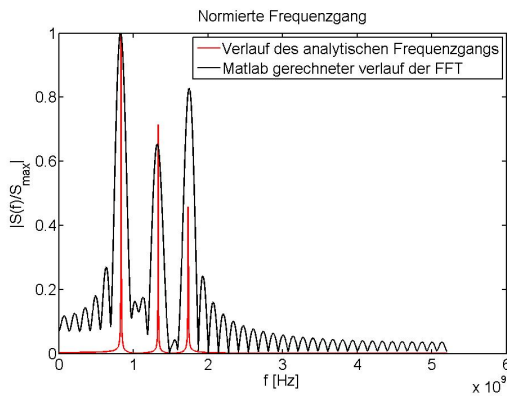


Abbildung 1. Spektrum eines nicht abgeklungenen Signal

Es wird deshalb eine optimale vorgegebene Methode zur Berechnung des Frequenzgangs untersucht (siehe [1]), im Rahmen des Projektes implementiert und mit realistischen Signalen getestet. Diese Methode soll mit einer limitierten Menge von Daten im Zeitbereich (begrenzte Anzahl von Stützstellen) einen möglichst genauen Frequenzgang berechnen. Es wird ein Linear Time Invariant (LTI) Filter als allgemeiner Ansatz genommen (siehe [3]): $y_n = \sum_{i=1}^N c_i y_{n-i} + \sum_{k=1}^{\tilde{N}} d_k f_{n-k}$, Wobei f_n bzw. y_n die Eingang- bzw. die Ausgangswerte sind,

N bzw. \tilde{N} die regressive bzw. non-regressive Filterordnung ist und c_i bzw. d_k die regressive bzw. non-regressive Koeffizienten des LTI Filters sind.

Es geht in diesem Projekt um ein Auto-Regressiver (AR-) Filter, noch als all-Pole Filter bezeichnet (siehe [3]). Es gilt hier $d_k = 0$ für alle k . Der Ansatz ist deshalb: $y_n = \sum_{i=1}^N c_i y_{n-i}$. Jeder Wert lässt sich deshalb als eine mit den c_k gewichtete Summe über die N vorherigen Werte berechnen.

II. THEORIE

A. Ansatz und Berechnung der Koeffizienten

Es werden Signale betrachtet, die in (zeit-)kontinuierlicher Form als Überlagerung von p harmonisch gedämpften Signalen dargestellt werden können:

$$s(t) = \sum_{n=1}^p A_n \sin(\omega_n t + \phi_n) e^{-\alpha_n t}. \quad (1)$$

A_n , ω_n , ϕ_n und α_n sind dabei die Amplitude, die Kreisfrequenz, die Phase und die Dämpfung des n -ten Signals.

Es wird ein digitalen Filter gesucht, dessen Übertragungsfunktion $Y(\omega)$ das Spektrum $S(\omega)$ mit einem möglichst kleinen Fehler approximiert. Wie eben erklärt, es wird als Ansatz ein AR-Filter genommen:

$$y(n) = s(n), n < N$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N c_k y(n-k), n \geq N. \quad (2)$$

Es geht deshalb in diesem Teil darum, die Koeffizienten c_k so zu bestimmen, dass der Abstand zum idealen Verlauf minimal wird:

$$\int_{\omega=0}^{\infty} |S(\omega) - Y(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \min.$$

Dieses Optimierungsproblem wird zunächst mit Hilfe des Parseval'schen Satzes im Zeitbereich überführt und die Integration durch eine Summe ersetzt, da nur diskrete abgetastete Werte zu Verfügung stehen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |s(n) - y(n)|^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Es werden zunächst Abtastwerte innerhalb des Intervalls $[m, m + M]$ berücksichtigt, wobei $M > 2N$ (siehe [1]) ist. Dieses Intervall wird als *Beobachtungsfenster* bezeichnet. Da es nicht immer günstig ist, bei $n = 0$ anzufangen, Es wird eine Verschiebung m gewählt. Setzt man die Formel

(2) an jedem Punkt des Fensters an, lässt sich dann das Optimierungsproblem (3) umschreiben (siehe [1]):

$$\|s - Hc\| \rightarrow \min. \quad (4)$$

Es gilt hier:

$$s = [s(m + N), s(m + N + 1), \dots, s(m + N + M)]^T \quad (5)$$

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T \quad (6)$$

$$H = \begin{pmatrix} s(m + N - 1) & s(m + N - 2) & \dots & s(m) \\ s(m + N) & s(m + N - 1) & \dots & s(m + 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(m + M - 1) & s(m + M - 2) & \dots & s(m + M - N) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Das Minimierungsproblem (4) ist mit Hilfe einer QR-Zerlegung gelöst worden (siehe [2]).

B. Stabilität des Filters

Es kann sein, dass das dimensionierte Filter instabil ist (siehe Abb. 2). Die Stabilität des Filters lässt sich mit Hilfe des Schur-Cohn-Testverfahrens untersuchen. Es werden dabei die Reflexionsfaktoren aus den c_k mit Hilfe einer Rekursionsformel berechnet (siehe [1]):

$$a_i^{(N)} = -c_i, i = 1, \dots, N$$

$$a_i^{(n)} = \frac{a_i^{(n+1)} - a_{n+1}^{(n+1)} a_{n+1-i}^{(n+1)}}{1 - (a_{n+1}^{(n+1)})^2}, i = 1, \dots, n; n = N - 1, \dots, 1. \quad (8)$$

Der Filter ist genau dann stabil, wenn für alle $k = 1, \dots, N$ gilt $|a_k^{(k)}| \leq 1$ ([1]). Die Stabilität des Filters hängt von der Ordnung N , der Fensterlänge M , der Verschiebung m , und dem Optimierungsverfahren ab. Eine genauere Analyse konnte im Rahmen dieses Projekt nicht gemacht werden. Es wurde jedoch (experimentell mit Matlab) gezeigt, dass ein Filter desto wahrscheinlicher stabil ist, je grösser die Ordnung N und das Verhältnis M/N sind.

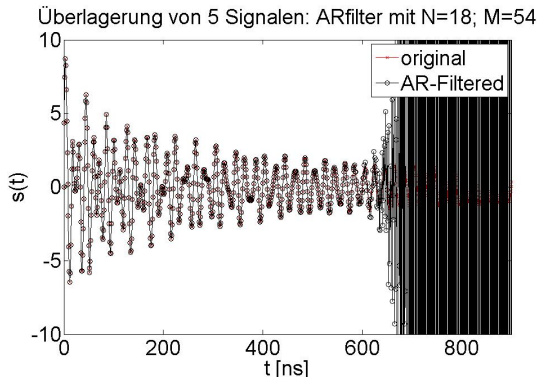


Abbildung 2. Instabiles AR-Filter

C. Filterparameter

Die Z-transformierte des Signals (2) kann gerechnet werden (siehe [1]).

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} y(k)z^{N-k} - \sum_{i=1}^N c_i \sum_{k=0}^{N-i-1} y(k)z^{N-i-k}}{z^N - \sum_{k=1}^N c_k z^{N-k}} \quad (9)$$

der Nenner von (9) ist ein Polynom N-ter Ordnung, das nur reelle Koeffizienten hat: Es gibt deshalb genau N Polstellen $z_{0n} = e^{(\alpha_n + j\omega_n)T}$, die konjugiert komplex sind. T ist dabei die Zeitschrittweite.

Wenn das Einseitige Spektrum betrachtet wird (nur positive Frequenzen), es kann gesagt werden, dass **ein Filter N-ter Ordnung genau aus $N/2$ teil Signalen mit den Parametern α_n, ω_n und Q_n besteht**. Die Parameter dieses Filters lassen sich mit den folgenden Formeln bestimmen:

$$\alpha_n = \frac{\ln|z_{0n}|}{T} \quad (10)$$

$$\omega_n = \frac{\arctan\left[\frac{\Im(z_{0n})}{\Re(z_{0n})}\right]}{T} \quad (11)$$

$$Q_n = \frac{\omega_n}{2\alpha_n}. \quad (12)$$

D. Frequenzgang

Der Frequenzgang des Signals (2) (und dabei eine Abschätzung des Frequenzgangs von (1)) lässt sich in einer sehr eleganter Weise mit Hilfe der analytischen Formel (9) bestimmen. Wenn $Y(\omega)$ und $Y(z)$ der Frequenzgang bzw. die Z-Transformierte ist, es gilt:

$$Y(\omega) = Y(z)|_{z=e^{j\omega T}} \quad (13)$$

Dieser Ansatz ist viel schneller und effizienter als eine FFT, wo über jeden Wert mehrmals aufsummiert wird. Er wird deshalb im Programm implementiert.

III. IMPLEMENTIERUNG UND ERGEBNISSE

A. Implementierung

Das Programm wurde im Matlab implementiert. Es besteht aus vier Modulen, die jeweils mehrere Funktionen enthalten:

- Die Ergebnisse aus Simulationen könnte überabgetastete Signale sein, was das Lösungsverfahren des Problems (4) deutlich verlangsamt. Dieses Problem wurde im ersten Modul behoben, indem die Schrittweite des ursprünglichen Signals vergrößert wurde (wenn nötig).
- Im zweiten Modul wird zuerst das Optimierungsproblems (4) mit einer QR-Faktorisierung der Matrix (7) gelöst (siehe [2]). Eine zweite Funktion zum Testen der Stabilität ist auch implementiert (siehe (8)).

Mit einer Schleife über mehrere Ordnungen, lässt sich der optimaler Filter in einem Bereich berechnen. Es ist dem

Benutzer überlassen, die minimale und maximale Ordnungen (N_{min} und N_{max}) zu wählen, worauf das gemacht werden sollte.

- Die Gleichungen (10), (11) und (12) sind im dritten Modul implementiert.
- Es geht im letzten Modul um die Berechnung und Darstellung des Frequenzgangs des Filters (siehe 13).

Das Diagramm auf der Abb. 3 veranschaulicht diesen Prozess.

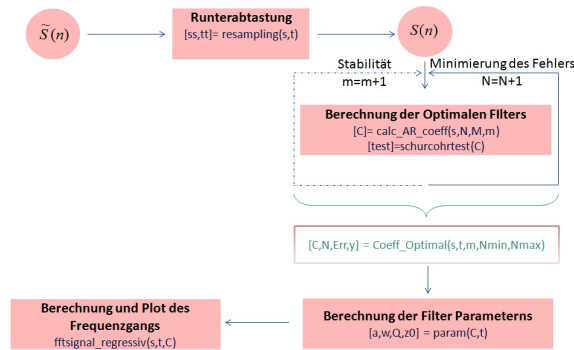


Abbildung 3. Prozess zur Berechnung des optimalen Filters und des Frequenzgangs

B. Ergebnisse

Im Abb. 4 wurde der Frequenzgang eines nicht komplett abgeklungenen Signals geplottet (analytische Formel vorgegeben!). Es werden hier die Verläufe des analytisch gerechneten Frequenzgangs mit der diskreten Fourier Transformation (FFT von Matlab) und dem AR-gerechneten Frequenzgang verglichen. Für das AR-Filter wurde eine Ordnung $N = 53$ ($M = 4N$) genommen: Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den analytischen und AR-gerechneten Verläufen. Der Fehler bei der FFT lässt sich deutlich erkennen, da das Signal nicht komplett abgeklungen ist.

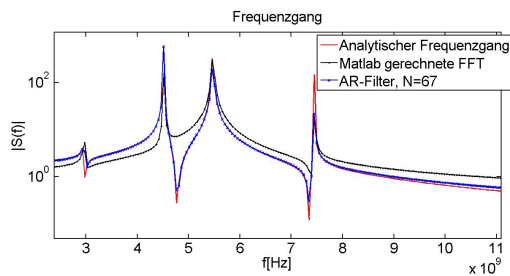


Abbildung 4. Frequenzgang eines nicht komplett abgeklungenen Signals

Schließlich wurden reellen Signale untersucht (Komplett abgeklungen, siehe Abb. 5). Das ist das Ergebnis einer Simulation an einer dielektrische Scheibe, gerechnet mit Hilfe der Finiten Integration Technik. Es wurde ein AR-Filter der

Länge $N = 130$ angesetzt.

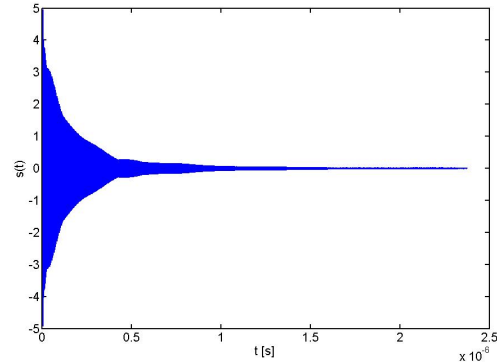


Abbildung 5. Ergebnis einer Simulation

Es lässt sich wieder eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der Diskreten Fourier Transformation (komplett abgeklungen!) und den AR-gerechneten Verläufen zeigen (siehe Abb. 6).

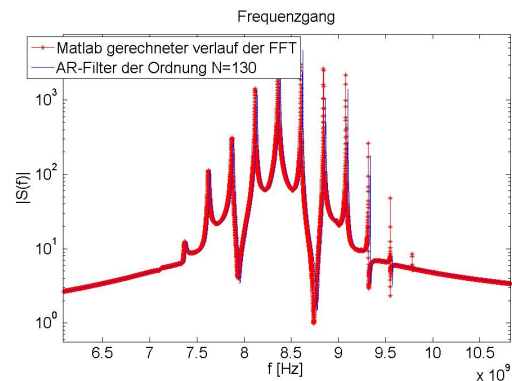


Abbildung 6. gerechneter Frequenzgang

Es ist hier zu sagen, dass die Diskrete Fourier Transformation als Referenz genommen wurde, da das Signal komplett abgeklungen ist. Dieses Signal hatte eine Länge von mehr als 10^6 gerechneten Abtastwerten. Die Simulationszeit betrug mehrere Tage. Der AR-Filter Ansatz kommt mit einem kleinen Beobachtungsfenster (nicht mal 1% der Länge) zum gleichen Ergebnis, und liefert dazu alle wichtigen Parameter des Signals (Dämpfungen, Resonanzfrequenzen, Güte).

ACKNOWLEDGMENT

Christoph Cläßen für die Betreuung

LITERATUR

[1] P. Thoma, *Zur numerischen Lösung der Maxwell'schen Gleichungen im Zeitbereich*, TU Darmstadt, 1997.
 [2] Günter Bärwolf, *Numerik für Ingenieure*, TU Berlin, 2009.
 [3] *Signal Processing : Continuous and Diskrete*, <http://ocw.mit.edu/terms>, MIT Open course.