

Programmierung eines FIT-Programms zur Lösung der magnetostatischen Potentialgleichung

Mohammad Sear Saber, Ugur Sahin



Abstract—Im vorliegenden Artikel wird mithilfe der Finiten Integrationstechnik (FIT) die magnetostatische Potentialgleichung in einem 3D-Rechengebiet mit einer Stromanregung in Form einer quadratischen Leiterschleife in Matlab implementiert. Dabei ist das 3D-Rechengebiet mit einer von eins verschiedenen Permeabilität befüllt. Außerdem wird die kontinuierliche Lösung der magnetostatischen Potentialgleichung sowie die diskrete FIT-Korrespondenz berechnet und jeweils für den Fall das die Permeabilität räumlich nicht konstant ist. Nach einer Plausibilitätsprüfung wird mithilfe von Biot-Savart eine Konvergenzstudie bezüglich der Gitterverfeinerung durchgeführt. Eine geschlossene stromdurchflossene Leiterschleife kann in einem Rechengebiet verwendet werden um komplexere Anordnungen zu untersuchen wie zum Beispiel eine Helmholtzspule.

Index Terms—Lösung der Potentialgleichung in der Magnetostatik, 3D-Rechengebiet, FIT-Formulierung (kontinuierlich, diskret), Plausibilität, Konvergenzstudie

1 EINLEITUNG

FIT steht für Finite Integrationstechnik (FIT) und ist ein numerisches Simulationsverfahren zum Lösen der Maxwell'schen Gleichungen. Das FIT-Verfahren ist ein Diskretisierungsschema welche die kontinuierlichen Maxwellgleichungen in diskrete Gittergleichungen übersetzt, dies nennt man auch Diskretisierung. Dazu wird für das FIT-Verfahren ein Raumgebiet diskretisiert. Die Lösungen werden an den Gitterpunkten näherungsweise berechnet und der Lösungsverlauf zwischen den Punkten approximiert.

Ein Beispiel für ein Raumgebiet Ω , ist die Berechnung des elektromagnetischen Vektorpotentials \vec{A} der Magnetostatik in einem 3D-Rechnengebiet, in der eine Leiterschleife mit Strom durchflossen wird. Zusätzlich zum Raumgebiet Ω muss noch der Rand des Raumgebiets $\partial\Omega$ eindeutig definiert werden.

Magnetostatik bedeutet, dass sich die magnetischen Felder zeitlich nicht mehr ändern. Magnetische Felder existieren in- und außerhalb von Gleichstrom durchflossenen Leitern und in der Umgebung von Dauermagneten.

2 MAGNETOSTATIK

Die Gleichungen von Maxwell werden mithilfe des Nabla-Operators in differentieller Form dargestellt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{J} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

Wir betrachten, wie in der Einleitung erwähnt, in der Magnetostatik nur stationäre magnetische Felder.

Nach Vernachlässigen aller Zeitableitungen in den Maxwellgleichungen ergeben sich folgende Beziehungen, wobei jedoch nur zwei für die Magnetostatik relevant sind:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6)$$

?? ist das Durchflutungsgesetz und ?? ist das Gesetz der Nichtexistenz magnetischer Ladungen [2]. Die Beziehung zwischen den magnetischen Größen \vec{H} und \vec{B} wird durch folgende Materialgleichung festgelegt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\vec{r})\vec{H}(\vec{r}) \quad (7)$$

Es ist zu erkennen das in der Magnetostatik als einzige elektrische Größe die Stromdichte \vec{J} enthalten ist. Dabei kann die Stromdichte \vec{J} physikalisch als Quelle des magnetostatischen Problems interpretiert werden, da es von den magnetischen Feldern \vec{B} und \vec{H} keine Rückwirkungen auf die Stromdichte \vec{J} gibt.

Die Aufgabe der Magnetostatik besteht also darin, bei vorgegebener Stromverteilung das zugehörige magnetische Feld zu bestimmen [2]. Diese Aufgabe soll durch Einführen eines Vektorpotentials \vec{A} vereinfacht werden. Das Vektorpotential soll dabei als Ansatz zum Lösen der Maxwellgleichungen ?? und ?? dienen.

2.1 Herleitung der kontinuierlichen Form

Die Lösung der Maxwellgleichungen ?? und ?? wird gesucht. Mithilfe von folgendem Ansatz (Vektorpotentialansatz der Magnetostatik) wird dies realisiert.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad \text{Vektorpotential} \quad (8)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes in die Maxwellgleichung ?? ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (9)$$

Der Ausdruck zeigt das die Wirbelfelder garantiert quellenfrei sind. Setzt man die Materialbeziehung ?? in das Durchflutungsgesetz ?? ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times (\mu^{-1} \vec{B}) = \vec{J} \quad (10)$$

Untersucht wird der Fall bei der die Permeabilität μ nicht räumlich konstant ist. Anschließend setzen wir den Vektorpotentialansatz in Gleichung ?? ein und erhalten folgende Gleichung, die es zu lösen gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\mu^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{J} = \kappa \vec{E} + \vec{J}_e \quad (11)$$

mit $\kappa = 0$ folgt:

$$\vec{\nabla} \times (\mu^{-1} (\vec{\nabla} \times \vec{A})) = \vec{J}_e \quad (12)$$

Dabei muss die Information der Kontinuitätsgleichung erhalten bleiben [3] und zwar muss das für jede beliebige Diskretisierung gelten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0 \quad (13)$$

Die Bedingung das die Kontinuitätsgleichung erfüllt werden muss wird auch durch folgenden Schritt ersichtlich, indem man die Divergenz an die zu lösende Gleichung ?? auf beiden Seiten ergänzt:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times (\mu^{-1} (\vec{\nabla} \times \vec{A}))) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e \quad (14)$$

Da die Divergenz eine Lineare Abbildung ist, wird folgendes aus der Gleichung ?? ersichtlich:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0 \quad (15)$$

Anschließend muss noch der Rand des Raumgebiets Ω festgelegt werden. Betrachtet wird der Fall eines PEC (Perfect Electric Conductor)-Randes. Auf einer ideal elektrischen leitenden Fläche sind die tangentialen Komponenten des E Feldes sowie die Normalkomponenten des H Feldes Null. Die Randbedingung lässt sich daher einfach implementieren, indem die Komponenten, welche den Rand berühren, zu null gesetzt werden.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times (\mu^{-1} (\vec{\nabla} \times \vec{A})) = \vec{J}_e & \text{in } \Omega \\ \vec{A}_t = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

2.2 Herleitung der diskreten Form

2.2.1 Einführung in FIT

Im Allgemeinen haben alle elektromagnetischen Feldprobleme ein offenes Grenzwertproblem [3]. Deshalb müssen die Berechnungen eingeschränkt und die Grenzen definiert werden. Das FIT-Verfahren verwendet dabei ein einfaches beschränktes Gitternetz mit folgender Raumregion $\Omega \in R^3$.

In unserem Fall beschränken wir uns auf das kartesische Koordinatensystem wie in Abbildung ?. Da das Raumgebiet Ω definiert ist muss noch die Topologie des Rechengebiets festgelegt werden. Das Rechengebiet lässt sich durch Punkte $P(n)$, Kanten $L(n)$, Flächen $A(n)$ und Volumina $V(n)$ beschreiben. Die Größe der Raumregion wird durch eine endliche Anzahl an Zellen angenähert: $V(n)$ für $1 \leq n \leq N_P$. N_P entspricht

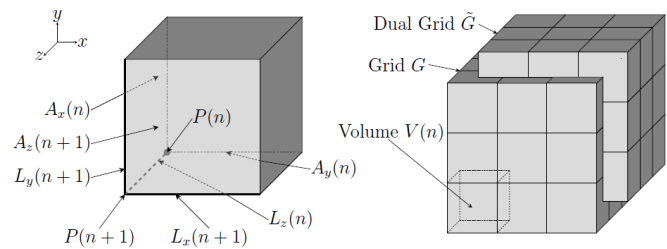


Fig. 1. Rastervolumen und Gitternetz Anordnung, auf dem linken Bild Volumen $V(n)$ des Diskretisierungsgitters und auf der rechten Seite schematische Skizze des Primären und Dualen Gitters (Quelle: [4] Seite 14)

dabei den Gitterpunkten, dass aus dem Produkt N_x, N_y und N_z gebildet wird. N_x, N_y und N_z entsprechen der Diskretisierung in x -, y - und z -Richtung. Die Diskretisierung ergibt einen endlichen Zellkomplex G , der durch die kanonische Indizierung beschrieben wird:

$$n = n(i, j, k) = i + (j - 1) \cdot N_x + (k - 1) \cdot N_x \cdot N_y \quad (16)$$

Mit den nachfolgenden Definitionen:

$$M_x = 1 \quad (17)$$

$$M_y = N_x \quad (18)$$

$$M_z = N_x \cdot N_y \quad (19)$$

kann man nun von einem Punkt aus in die jeweilige x -, y - oder z -Richtung gelangen.

Zusätzlich werden die Definitionen der Rotation und der Divergenz eingeführt. Die Rotation (englisch: Curl) verwendet den Buchstaben C für das primäre Gitter oder \tilde{C} für das duale Gitter. Für die Divergenz wird der Buchstabe S (englisch: Source) verwendet oder \tilde{S} (duales Gitter).

Das B- und H-Feld werden in FIT wie folgt definiert:

$$\hat{b} := \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (20)$$

$$\hat{h} := \int_L \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (21)$$

Für näheres zu FIT siehe [4].

2.2.2 Herleitung

Wie im kontinuierlichen Fall wird die korrespondierende diskrete Lösung folgender Maxwellgleichungen gesucht:

$$\tilde{C} \cdot \hat{h} = \hat{j} \quad (22)$$

$$S \cdot \hat{b} = 0 \quad (23)$$

?? ist die Korrespondenz zum Durchflutungsgesetz in der FIT und ?? ist die Korrespondenz zum Gesetz der Nichtexistenz magnetischer Ladungen in der FIT.

Die Beziehung zwischen den magnetischen Größen \hat{h} und \hat{b} wird durch folgende Materialgleichung festgelegt:

$$\hat{h} = M_{\mu-1} \cdot \hat{b} \quad (24)$$

Die $M_{\mu-1}$ ist die Materialmatrix die zur Permeabilität μ korrespondiert und die Dimension $3N_p \times 3N_p$ aufweist sowie nur Einträge auf der Hauptdiagonalen besitzt.

Mithilfe des korrespondierenden Vektorpotentialansatzes wird die Lösung der diskreten Form hergeleitet.

$$\hat{b} = C \cdot \hat{a} \quad \text{disrektes Vektorpotential} \quad (25)$$

Es folgen die selben Umformungsschritte wie beim kontinuierlichen Fall. Einsetzen der Gleichung ?? in Gleichung ?? ergibt folgenden Zusammenhang:

$$S \cdot C \cdot \hat{a} = 0 \quad (26)$$

Setzt man die Materialgleichung von ?? in das diskrete Durchflutungsgesetz ?? ein, so erhält man folgende Beziehung:

$$\tilde{C} \cdot M_{\mu-1} \cdot \hat{b} = \hat{j} \quad (27)$$

Durch Einsetzen des diskreten Vektorpotentialansatzes in ??, folgt die zu lösende Gleichung, die korrespondiert mit der kontinuierlichen Gleichung in ??.

$$\tilde{C} \cdot M_{\mu-1} \cdot C \cdot \hat{a} = \hat{j}_e \quad (28)$$

Zusätzlich muss wie im kontinuierlichen Fall auch im diskreten Fall folgende Bedingung immer erfüllt sein:

$$\tilde{S} \cdot \hat{j}_e = 0 \quad (29)$$

Anschließend wird noch der Rand definiert um das Problem im diskreten Fall vollständig zu beschreiben.

$$\begin{cases} \tilde{C} \cdot M_{\mu-1} \cdot C \cdot \hat{a} = \hat{j}_e & \text{in } \Omega \\ \hat{a} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

Um das lineare Gleichungssystem ?? zu lösen wird es noch vereinfacht definiert zu der Form $A \cdot x = b$. Somit entspricht dies folgender Definitionen:

$$A := \tilde{C} \cdot M_{\mu-1} \cdot C \quad (30)$$

$$x := \hat{a} \quad (31)$$

$$b := \hat{j}_e \quad (32)$$

3 HERANGEHENSWEISE

Zu erst wurde das 3D-Rechengebiet, welches einem Würfel mit den Kantenlängen von 1 Meter beträgt, erstellt. Anschließend wurden die FIT-Matrizen G, S und C sowie \tilde{G} , \tilde{S} und \tilde{C} und die Materialmatrix $M_{\mu-1}$ erstellt.

Um die Problemstellung ?? zu lösen fehlt die Leiterschleife. Das heißt es musste festgelegt werden wo die quadratische Leiterschleife die mit $1 \frac{A}{m^2}$ durchflossen wird, liegt. Die Leiterschleife wurde auf die x-y-Ebene gelegt und so implementiert das die Seitenlänge der Leiterschleife 0,5m entspricht. Das heißt die Diskretisierung darf minimal $N_x = N_y = N_z = 5$ besitzen.

Anschließend wurde die Gleichung ?? iterativ und direkt gelöst. Zum Schluss wurde noch eine Plausibilitätsprüfung sowie eine Konvergenzstudie bezüglich der Gitterverfeinerung durchgeführt.

4 ERGEBNISSE

4.1 Performenz

Bei der Performenz wurde Schrittweise die Anzahl der Gitterpunkte N_p erhöht. Dazu wurde jeweils die Zeit ausgegeben die der Rechner benötigte, um folgendes Gleichungssystem $A \cdot x = b$ zu lösen. Dieser Zusammenhang zwischen Anzahl an Gitterpunkten und benötigter Zeit ist in Abbildung ?? zu sehen. Es ist deutlich zu erkennen das mit

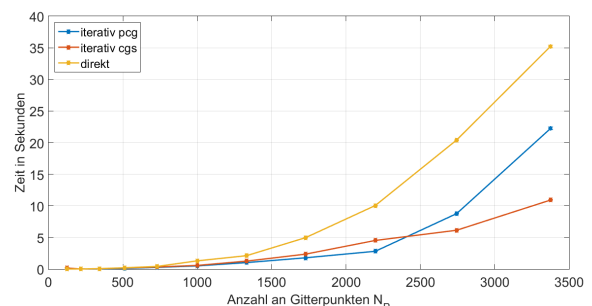


Fig. 2. Vergleich zwischen iterative und direkte Rechenzeit in Abhängigkeit der Gitteranzahl

steigenden Gitterpunkten die Rechenlaufzeit steigt. Vergleicht man nun die zwei iterativen Löser die verwendet wurden (pcg und cgs) sieht man, dass die Rechenzeit von cgs im Mittel deutlich weniger Zeit benötigt als der Algorithmus von pcg. Um so kleiner N_p desto geringer der Abstand zwischen den Zeiten und um so größer die Gitteranzahl wird desto größer wird auch der Abstand der Rechenzeit. Bei allen Lösern wurde eine Genauigkeit von 10^{-12} festgelegt, was einer sehr hohen Genauigkeit entspricht. Zum Vergleich zu den iterativen Lösern ist in Gelb noch der Verlauf des direkten Lösern in Abhängigkeit dargestellt. Jedoch ist der Vergleich zwischen direktem und iterativem Löser immer mit Vorbehalt zu betrachten, da ein direkter Vergleich durch die unterschiedlichen Berechnungsweisen kaum möglich ist.

4.2 Plausibilitätsprüfung

Um die Plausibilität zu untersuchen wird das B-Feld analytisch mithilfe von Biot-Savart berechnet. Das B-Feld wird dabei entlang der z-Achse durch die Mitte der Leiterschleife ausgewertet. Die analytische Lösung wird anschließend mit der numerischen Lösung aus Matlab verglichen. In Abbildung ?? sind die Verläufe des B-Feldes entlang der z-Achse zu sehen. Es ist zu erkennen das die Verläufe sich sehr

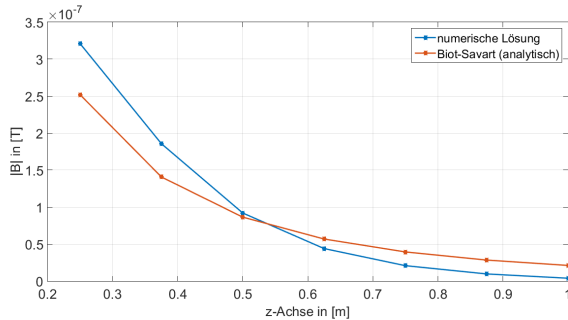


Fig. 3. Plausibilitätsprüfung der numerischen Lösung mithilfe von Biot-Savart

ähneln, jedoch nicht identisch sind. Für den Verlauf der analytischen Kurve wurde folgende Formel verwendet die für eine Rahmenspule gilt:

$$B = \frac{\mu_0 N I a b}{2\pi z^3} \tag{33}$$

Zum lösen der Gleichung wurde eine Windungszahl N=1 und ein Strom I=1A verwendet. Zudem ist z der Abstand vom Ort des zu bestimmendem B-Feldes zur Leiterschleife. Da in der Mitte der Leiterschleife das B-Feld am größten ist, entspricht der erste Wert den größten. Dargestellt ist der Betrag des B-Feldes. Im dargestellten Plot wird eine Gitterauflösung von Nx=Ny=Nz=9 gewählt. Der gesamte Plot ist in Abbildung ?? zu sehen.

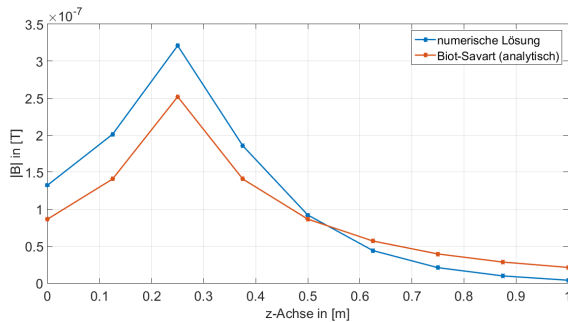


Fig. 4. Gesamte Darstellung der Plausibilitätsprüfung mithilfe von Biot-Savart

4.3 Konvergenzstudie

Bei der Konvergenzstudie wurde der relative Fehler in Bezug auf die Gitteranzahl berechnet. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung ?? zu sehen. In ?? ist der relative Fehler, sowie zwei Referenzgeraden der ersten und zweiten Ordnung aufgetragen. Die Gitterschrittweite Δ wurde wie folgt normiert:

$$\Delta = \frac{L_x}{dim(N_x) - 1} \tag{34}$$

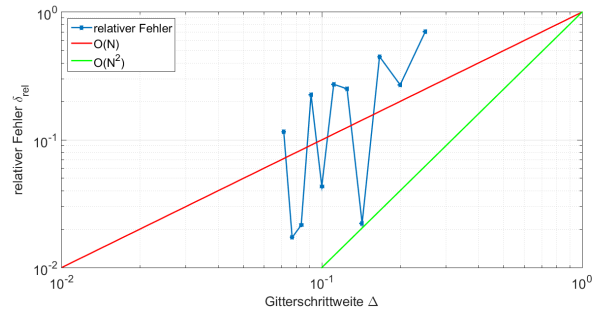


Fig. 5. Konvergenzstudie zur Gitterverfeinerung

In unserem Fall beträgt $L_x = 1$ und die Dimension entspricht den jeweiligen Gitterverfeinerungen. Das Gitter wird zwischen $N_x=5$ bis $N_x=15$ bestimmt, da der verwendete Rechner bei zu hohen N_p Werten abstürzte. Der relative Fehler wurde folgendermaßen, mithilfe der L2-Normierung implementiert:

$$relativerFehler = \left| \frac{(\overline{B(N_p)} - \overline{B(N_{p,max})})}{\overline{B(N_{p,max})}} \right| \tag{35}$$

Dazu wurde die magnetische Flussdichte B bei der höchstmöglichen Gitteranzahl N_p bestimmt und anschließend mit allen kleineren Diskretisierungen N_p normiert. Dabei liegt N_p zwischen:

$$5 \leq N_p < N_{p,max} = 16 \tag{36}$$

Man erkennt, dass der relative Fehler sich um die Referenzgerade erster Ordnung herum bewegt. Vermutlich liegt die erste Konvergenzordnung vor. Um diese Aussage jedoch zu festigen müsste man weitere Gitterverfeinerungen vornehmen.

5 FAZIT UND AUSBLICK

Das Projekt wurde erfolgreich durch Implementierung der Leiterschleife in einem 3D-Rechengebiet mithilfe von FIT in Matlab eingebunden und ausgewertet. Dies kann als erste Stufe zur Implementierung weiterer Leiterschleifen genutzt werden, um eventuell eine Helmholtzspule nachzubilden. Desweiteren kann die Permeabilität geändert werden, dass als Änderung des Materials interpretiert werden kann. Die Gitterverfeinerung, solange es der Rechner erlaubt, sorgt für genauere Ergebnisse und eine präzisere Aussage über das Verhalten.

REFERENCES

- [1] T. Weiland, "A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component Fields", Electronics and Communications AEUE, vol. 31, no. 3, pp. 116-120, 1977
- [2] Prof. Dr.-Ing. Schuhmann, Theoretische Elektrotechnik Skript zur Vorlesung, Stand 2013.
- [3] Universität Ulm, Kontinuitätsgleichung, <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/gk3b-2002-2003/node20.html>
- [4] Sebastian Schoeps, Master Thesis, "Coupling and Simulation of Lumped Electric Circuits Refined by 3-D Magnetoquasistatic Conductor Models Using MNA and FIT", Wuppertal, 2008.
- [5] Sebastian Schoeps, Dissertation, "Multiscale Modeling and Multi-rate Time-Integration of Field/Circuit Coupled Problems", Wuppertal, 2011.
- [6] Markus Clemens and Thomas Weiland, "Transient Eddy-Current Calculation with the FI-Method", IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 35, NO. 3, MARCH 1999.