

Numerische Optimierung der Geometrie eines Solenoids in der Magnetoquasistatik

Albert Piwonski

Technische Universität Berlin, Fakultät für Elektrotechnik und Informatik
Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Einsteinufer 17, D-10587 Berlin, Germany.

Zusammenfassung—Im vorliegenden Artikel wird die rechnergestützte Optimierung der Geometrie eines Solenoids bzw. einer Zylinderspule bezüglich der Verlustleistung behandelt. Die besondere Herausforderung hierbei ist es obere- und untere Schrankenwerte für die drei Designparameter zu finden, um einen festen Induktivitätswert berücksichtigen. Des weiteren wird der Einfluss von magnetoquasistatischen Effekten auf den Optimierungsprozess untersucht.

Index Terms—Numerische Optimierung induktiver Bauelemente, Solenoid, Magnetoquasistatik.

I. EINLEITUNG

SPULEN sind als magnetische Bauteile für zahlreiche Anwendungen in der Elektrotechnik unverzichtbar: So funktioniert bspw. kein Schaltnetzteil ohne Verwendung einer Spule. Zur Erzeugung von räumlich homogenen Magnetfeldern (Anwendung u.a. als Teilchendetektor) bieten sich Solenoide als eine einfach herzustellende Ausführungsform an. Aufgrund der endlichen elektrischen Leitfähigkeit des Leiters entsteht eine Verlustleistung, welche es im Folgenden zu minimieren gilt. Da Optimierungsprobleme oftmals bereits bei kleinen Anzahlen von Designparametern nicht mehr analytisch durchführbar sind [2], wird mit der Simulationssoftware CST EM STUDIO 2016® eine numerische Optimierung durchgeführt. Von Vorteil bei diesem Vorgehen ist, dass nach der Simulation die genaue Feldverteilung der Anordnung vorliegt (Bewertung des EMV-Verhaltens). Zudem kann der Bau von Prototypen und deren Messungen teils entfallen, was Kosten einspart. Das Modell der Spule wird zunächst in II. beschrieben, bevor anschließend das Optimierungsproblem aufgestellt wird (Abschnitt III), welches in IV. und V. in der Magetostatik und -quasistatik gelöst wird.

II. MODELL DES SOLENOIDS

Die Modellierung der Zylinderspule in der Programmumgebung von CST EM STUDIO 2016® haben bereits die Kommilitonen BAUZ & NEUMEISTER durchgeführt [1]. Wesentliche Bestandteile hierbei sind die Beschreibung von Geometrie und Material der Anordnung, sowie des Anregungsstroms. Die Modellgrößen sind in der Tabelle I der Übersicht halber dargestellt (Designparameter fett hervorgehoben).

Tabelle I
MODELLGRÖSSEN DES SOLENOIDS

Variable	Größe	Einheit	Initialwert
Geometrie & Material:			
l_S	Spulenlänge	mm	10
r_S	Spulendradius	mm	5
r_D	Drahradius	mm	0.4
N	Windungsanzahl	-	10
κ_{Cu}	Konduktivität Kupfer	A/Vm	$58 \cdot 10^6$
$\epsilon = \epsilon_0$	Vakuumpermittivität	As/Vm	$8.85 \cdot 10^{-12}$
$\mu = \mu_0$	Vakuumpermeabilität	Vs/Am	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Anregung:			
I	RMS Anregungsstrom	A	1

III. OPTIMIERUNGSPROBLEM

Es wird folgendes restringiertes Optimierungsproblem aufgestellt:

$$\begin{aligned} & \text{minimiere } P_V(\mathbf{x}), \quad P_V : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ & \text{u.d.N.} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^8 \end{aligned}$$

Darin ist die Funktion P_V als Zielfunktion definiert, die in Abhängigkeit vom Designvektor $\mathbf{x} := (l_S, r_S, r_D)^T \in \mathbb{R}_+^3$ Aufschluss über die elektrische Verlustleistung der Zylinderspule gibt. Mit der komponentenweise definierten Funktion \mathbf{g} werden die Nebenbedingungen (NB) des Optimierungsproblems beschrieben:

- NB I: Charakteristische und für die spätere Applikation ausschlaggebende Bauteileigenschaft ist die Induktivität L der Spule. Daher soll die Induktivität der optimierten Spule einen festen Wert L_0 besitzen. Um diesen festen Wert wird ein Toleranzband gelegt ($\pm 2\%$), welches eine endliche Genauigkeit der Fertigung beschreibt. Diese Bedingung lässt sich als weiche Restriktionen schreiben:

$$\begin{aligned} L_{0,\min}(\mathbf{x}) \leq L_0(\mathbf{x}) \leq L_{0,\max}(\mathbf{x}) & \Leftrightarrow \\ 0 \geq \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) := L_{0,\min}(\mathbf{x}) - L_0(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) := L_0(\mathbf{x}) - L_{0,\max}(\mathbf{x}) \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

- NB II: Um einen Windungschluss zu verhindern, dürfen sich die Windungen der optimierten Spule nicht über-

schneiden. Damit wird \mathbf{x} durch folgende Ungleichungsrestriktionen geometrisch begrenzt:

$$\mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max} \Leftrightarrow \mathbf{0} \geq \begin{cases} g_{3,4,5}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_{min} - \mathbf{x} \\ g_{6,7,8}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - \mathbf{x}_{max} \end{cases} \quad (2)$$

Diese Nebenbedingungen werden nur für $\mathbf{x} \in F \subset \mathbb{R}_+^3$ erfüllt. Die Teilmenge F ist die zulässige Menge des Optimierungsproblems, in der eine optimale Parameterkonfiguration gesucht wird.

IV. OPTIMIERUNG IN DER MAGNETOSTATIK

A. Physikalischer Hintergrund

In die Spule wird ein Gleichstrom eingepreßt. Da die Feldgrößen in der Statik zeitlich konstant sind, verschwinden die zeitveränderlichen Terme des FARADAY'schen Induktionsgesetzes und des AMPERE'schen Durchflutungsgesetzes. Mit den weiteren MAXWELL-Gleichungen für die raumladungsfreie Anordnung der Zylinderspule kann dann eine Potentialgleichung (elliptische partielle Differentialgleichung) aufgestellt werden, die durch die Methode der finiten Elemente (FEM) auf diskretisiertem Rechenraum numerisch gelöst wird.

B. Implementierung in CST EM STUDIO

Die NB II wird durch das Durchführen einer Parameterstudie in „Box Constraints“ geschrieben, in denen die Komponenten von \mathbf{x} zunächst unabhängig voneinander variiert werden dürfen, ohne dass ein Windungsschluss auftritt:

$$\begin{aligned} 10 \text{ mm} &\leq l_S \leq 100 \text{ mm} \\ 0.5 \text{ mm} &\leq r_S \leq 100 \text{ mm} \\ 0.1 \text{ mm} &\leq r_D \leq 0.4 \text{ mm} \end{aligned}$$

In analytischen Herleitungen zur Ermittlung der Induktivität einer Anordnung werden oftmals Voraussetzungen wie *unendlich langer Leiter*, *unendlich dünner Draht* oder *Vernachlässigung des Streufusses* verwendet, um den Rechenaufwand auf eine überhaupt lösbare Komplexität zu begrenzen. Eine andere Herangehensweise der Induktivitätsermittlung, der dem realen Aufbau mit einer räumlichen Ausdehnung des Leiters näher kommt, sind die durch Messungen aufgestellten empirischen Näherungsformeln. Eine solcher Näherungsformeln, die für die Induktivitätsberechnung einlagiger Zylinderspulen anwendbar ist, lautet nach WHEELER [5]:

$$L = N^2 \frac{r_S^2}{9r_S + 10l_S} \quad (3)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Induktivität nach der Gleichung (3) unabhängig vom Drahtradius r_D ist. Aufgrund des endlich dünnen Drahtradius und dessen ebenfalls endlicher Leitfähigkeit ergibt sich allerdings auch eine Feldverteilung im Leiter. Damit einhergehend ist ein Anteil der magnetischen Flussverkettung Ψ_m , der auch die Leiterfläche durchsetzt womit nach Gleichung (4) eine innere Induktivität entsteht, die sich zur äußeren Induktivität superponiert:

$$\Psi_m = N \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = LI \quad (4)$$

Durch algebraische Umformung der Gleichung (3) kann die Spulenlänge l_S als Funktion f vom Spulenradius r_S und der Induktivität L dargestellt werden:

$$l_S = f(r_S, L) = \left(\frac{(Nr_S)^2}{L} - 9r_S \right) \frac{1}{10} \quad (5)$$

Die Induktivität wird auf den Wert $L_0 \equiv 10.36 \mu H$ festgelegt. Die Variation des Spulenradius innerhalb des korrespondierenden „Box Constraints“-Eintrags liefert Abb. 1 aus der Folgendes resultiert: Lläuft r_S innerhalb des Intervalls $[31.9735; 64.4429] \text{ mm}$, so liegt l_S noch stets im zulässigen Intervall ($10 \text{ mm} \leq l_S \leq 100 \text{ mm}$).

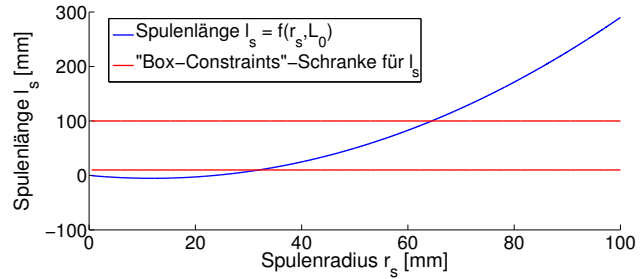


Abbildung 1. Spulenlänge l_S bei Variation des Spulenradius r_S für feste Induktivität L_0 [6]

Da Gleichung (3) empirischer Natur ist - sie sich also nicht aus physikalischen Gesetzen deduktiv ableiten lässt - entsteht bei der algebraischen Umformung zu Gleichung (5) für kleine Spulenradien r_D eine negative und damit unphysikalische Spulenlänge l_S (siehe Abb. 1). Diese führt allerdings zu keinen Problemen, da sie nicht innerhalb des zulässigen Bereiches liegt. Durch das feste Verknüpfen der Spulenlänge l_S mit dem Spulenradius r_S lässt sich ein Designparameter aus dem ursprünglichen Optimierungsproblem eliminieren. Es ergibt sich folgendes reduziertes Optimierungsproblem mit $\tilde{\mathbf{x}} := (r_S, r_D)^T \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } \tilde{P}_V(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{P}_V : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ &\text{u.d.N.} \\ &\tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{g}} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^6 \end{aligned}$$

Die Nebenbedingungen werden für $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{F} \subset \mathbb{R}_+^2$ erfüllt. Die zulässige Menge \tilde{F} lässt sich durch Abb. 2 in Form einer Fläche, die durch die verbliebenen Designparameter aufgespannt wird, veranschaulichen:

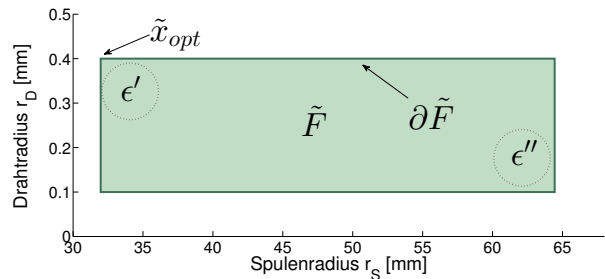


Abbildung 2. Zulässige Menge \tilde{F} des reduzierten Optimierungsproblems [6]: Nun lässt sich die zulässige Menge nicht mehr als Quader (3D), sondern als Rechteck (2D) interpretieren

Der physikalischen Problemklasse entsprechend wird der „Magnetostatics Field Solver“ (MSFS) verwendet. In dem Modell wird weiter der funktionale Ausdruck für l_S in der „Parameter List“ definiert, wodurch ein Update mit einem Verändern von r_S realisiert wird. Weiter werden die reduzierten „Box Constraints“ für r_D und r_S in die „Optimizer“-Umgebung als Minimal- und Maximalwerte gesetzt. Als „Goal Function“ wird das Ergebnis elektrischen Verlustleistung ausgewählt, welche sich als „Template Based Postprocessing“-Größe definieren lässt. Als initiale Geometrie werden $r_{S,initial} = 40\text{ mm}$ und $r_{D,initial} = 0.3\text{ mm}$ gesetzt. Im letzten Schritt lässt sich der Optimierungsprozess mit verschiedenen implementierten Algorithmen starten. Sämtliche Verfahren führen auf das selbe optimale Setting:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{initial} &= \begin{bmatrix} 40.0 \\ 0.3 \end{bmatrix} \text{ mm} \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_{opt} = \begin{bmatrix} 31.9735 \\ 0.4 \end{bmatrix} \text{ mm} \\ P_{V,initial} &= 158.1 \text{ mW} & P_{V,opt} &= 67.1 \text{ mW} \end{aligned}$$

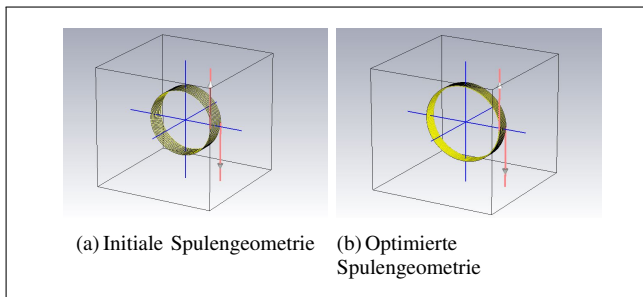


Abbildung 3. Vergleich: Initiale- und optimierte Spulengeometrie [7]

Tabelle II
OPTIMIERALGORITHMEN IN DER MAGNETOSTATIK

Algorithmus	Iterationsschritte	\bar{T}_R [min]
Quasi Newton (lokal)	13	9.4
Nelder Mead Simplex (lokal)	10	11.6
Trust Region Framework (lokal)	9	10.8
CMA-ES (global)	14	11.1

Aus Tabelle II wird ersichtlich, dass sowohl die lokal suchenden, als auch der global suchende Optimieralgorithmus nach ähnlich vielen Iterationsschritten und vergleichbaren mittleren Rechenzeiten \bar{T}_R ($\hat{=}$ gemittelte Rechenzeit MSFS und Rechenzeit Optimierer) gegen $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ konvergieren. Die Quantifizierung der Induktivität erfolgt über die im Rechengebiet der Spule gespeicherte magnetische Energie W_{mag} (aus Postprocessing), welche sich schreiben lässt als:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} LI^2 \Leftrightarrow L = 2 \frac{W_{mag}}{I^2} \quad (6)$$

Es ergibt hiermit eine Induktivität von $L_{opt} = 10.188 \mu\text{H}$, die nur um 1.6% von dem Initialwert L_0 abweicht (NB I erfolgreich eingebunden). Da sich die Windungen nicht überlappen, wird NB II ebenfalls befriedigt. Das Ergebnis ist plausibel, denn für Gleichströme lassen sich die Stromwärmeverluste ($I^2 R$) nach geometrischen Überlegungen wie folgt berechnen:

$$P_{V,DC} = I^2 \cdot \frac{\sqrt{(4\pi N r_S)^2 + l_S^2}}{\kappa_{Cu} 2\pi r_D^2} \quad (7)$$

Nach Gleichung (7) ist es schlüssig, dass der kleinste Wert für r_S und der größte Wert für r_D gefunden wurde. D. h. $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ liegt auf dem Rand $\partial \tilde{F}$ der zulässigen Menge (siehe Abb. 2). Da jetzt die Lage von $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ bekannt ist, lässt sich ein Vergleich der Optimieralgorithmen bezüglich lokaler und globaler Konvergenz durchführen (Wichtigkeit der Lage des Startvektors). Dazu werden zwei verschiedene Initialgeometrien gewählt; eine, die nahe von $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ liegt (innerhalb der ϵ' -Umgebung in Abb. 2) und eine, die innerhalb der ϵ'' -Umgebung liegt (siehe Abb. 2). Der relative Fehler, der die Abweichung des aktuellen Designvektors $\tilde{\mathbf{x}}_k$ zu $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ in dem k-ten Iterationsschritt beschreibt, sei definiert als:

$$Err_k := \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_{opt} - \tilde{\mathbf{x}}_k\|_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{opt}\|_2} \quad (8)$$

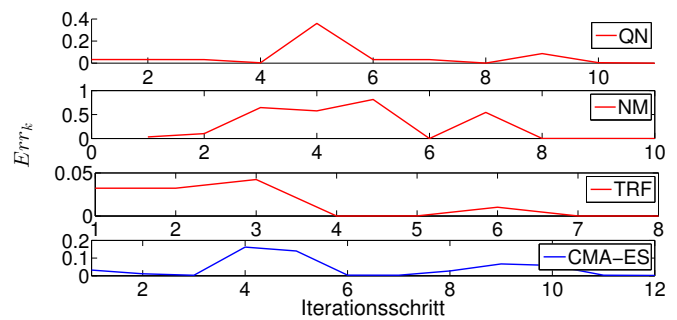


Abbildung 4. Konvergenz der Algorithmen: $\tilde{\mathbf{x}}_{initial} \in \epsilon'$ [6]

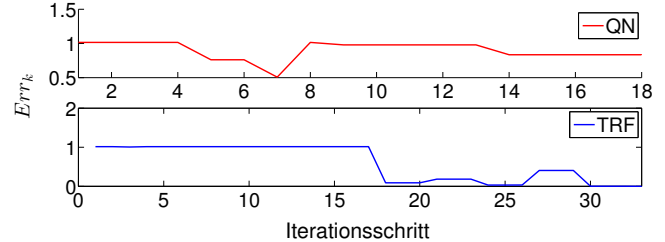


Abbildung 5. Konvergenz der Algorithmen: $\tilde{\mathbf{x}}_{initial} \in \epsilon''$ [6]

Abb. 4 und 5 zeigen Ergebnisse: Für $\tilde{\mathbf{x}}_{initial} \in \epsilon'$ konvergieren die Algorithmen gegen $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ nach maximal 12 Iterationen. Liegt $\tilde{\mathbf{x}}_{initial}$ nicht in unmittelbarer Umgebung des Optimums, findet der Quasi-Newton Algorithmus nur ein lokales Minimum und bricht ab. Gegensätzlich dazu konvergiert der Trust Region Framework Algorithmus (jetzt global im Programm definiert) gegen $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ nach 33 Iterationen. Hierbei zu erwähnen ist, dass der TRF erst nach einer adaptiven Gitterverfeinerung (nun ca. $4 \cdot 10^5$, statt ca. $2.5 \cdot 10^5$ Tetrahedrons) gegen $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ konvergiert. Die Auflösung des Rechengitters muss somit auch als Teil der NB des Optimierungsproblems betrachtet werden.

V. OPTIMIERUNG IN DER MAGNETOQUASISTATIK

A. Physikalischer Hintergrund

In die Zylinderspule wird ein Wechselstrom mit einem Effektivwert von 1 A eingepreßt. In Problemstellungen der Magnetoquasistatik wird der Anteil der Verschiebungsstromdichte gegenüber der Leitungsstromdichte in dem AMPERE'schen

Durchflutungsgesetz vernachlässigt. Diese Näherung ist gerechtfertigt, wenn folgende Zusammenhänge herbeigezogen werden: Für eine harmonische Anregung homogener, linearer, isotroper und zeitinvarianter Medien lässt sich schreiben:

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\kappa + j\omega\epsilon)\mathbf{E} + \mathbf{J}_e \quad (9)$$

Für Frequenzen $f \ll |\frac{\kappa}{\epsilon 2\pi}|$ kann $j\omega\epsilon$ in Gleichung (9) gegenüber κ vernachlässigt werden: dies ist die magnetoquasistatische Näherung.

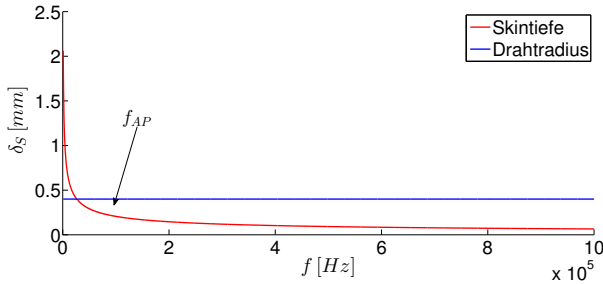


Abbildung 6. Frequenzabhängigkeit der Skintiefe mit Kennzeichnung des Arbeitspunktes [6]

Für eine Anregungsfrequenz des eingepprägten Stroms von $f_{AP} = 100 \text{ kHz}$ (siehe Abb. 6) ist der Anteil der Verschiebungsstromdichte um 13 Größenordnungen kleiner als die Leitungsstromdichte, weshalb die Näherung für diesen Arbeitspunkt (AP) gerechtfertigt ist. Mit den weiteren MAXWELL-Gleichungen lässt sich die Diffusionsgleichung aufstellen (parabolische partielle Differentialgleichung im Zeitbereich), die dann wiederum durch die FEM gelöst wird.

Zeitharmonische Felder induzieren in leitfähigem Material Wirbelströme, die die Eigenschaft haben sich in einer Schicht nahe der Oberfläche des Materials zu konzentrieren (Skin-Effekt). Die Dicke der Schicht lässt sich über die Skintiefe δ_S beschreiben [4]:

$$\delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}} \quad (10)$$

Mit dem Verdrängen des Stroms aus dem Leiterinneren verringert sich der effektiv genutzte Leiterquerschnitt womit eine Erhöhung der Verlustleistung einhergeht. Da das elektrische Feld nach dem OHM'schen Gesetz mit der Konduktivität verknüpft ist, ist zudem eine Verdrängung des E-Feldes zu erwarten. Neben dem Skin-Effekt tritt aufgrund der räumlich benachbarten Windungen der Proximity-Effekt auf, der die Feld- und Stromverteilung im Leiterinneren ebenfalls beeinflusst. Mit der Feldverdrängung ist nach Gleichung (4) auch eine Änderung der Gesamtinduktivität zu erwarten.

1) *Implementierung in CST EM STUDIO*: Der Problemklasse entsprechend wird der Löser „Low Frequency Domain Solver“ in der Programmumgebung verwendet. Der Optimierungsprozess wird analog zu dem in der Magnetostatik durchgeführt (mit $\tilde{\mathbf{x}}_{initial} \in \epsilon$) und liefert die folgendes Ergebnis bei Verwendung des Quasi-Newton Verfahrens bei $9 \cdot 10^5$ Tetrahedrons (notwendig zur Auflösung des Skineffekts):

$$\tilde{\mathbf{x}}_{opt,MQS} = \begin{bmatrix} 31.9735 \\ 0.4 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$P_{V,opt,MQS} = 138.65 \text{ mW}$$

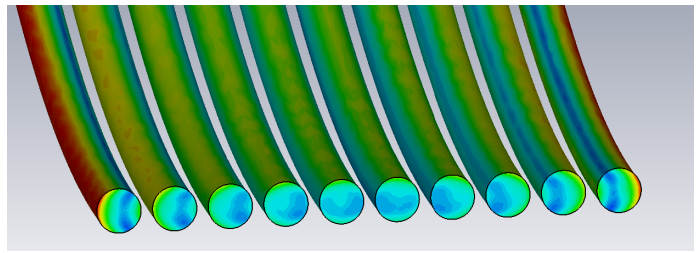


Abbildung 7. Verdrängung des elektrischen Feldes aus dem Leiterinneren [7]: rot $\hat{=}$ hoher Feldstärkebetrag, blau $\hat{=}$ niedriger Feldstärkebetrag

$\tilde{\mathbf{x}}_{opt,MQS}$ stimmt also mit $\tilde{\mathbf{x}}_{opt}$ aus der Magnetostatik überein. Unterschiedlich hingegen ist die etwa verdoppelte minimale Verlustleistung $P_{V,opt,MQS}$ der Spule. Diese Verlustverdoppelung und eine Induktivitätsabweichung von nun 2,6 % zu L_0 lässt sich durch Visualisierung der Feldverdrängung (Abb. 7) und vorherigen Erläuterungen erklären.

Für Anwendungen, in denen diese Abweichung kritisch für die Systemfunktionalität ist, können folgende Lösungsansätze verfolgt werden:

- Offset von 2.6 % auf L_0 (Kompensation der Abweichung) und analoger Optimierungsprozess
- Vektorielle Optimierung: Definition eines gewichteten Zielfunktional aus P_V und nun zusätzlich W_{mag} um über die magnetische Energie einen festen Induktivitätswert sicherzustellen

VI. FAZIT & AUSBLICK

Der Optimierungsprozess wurde in der Magnetostatik und Magnetoquasistatik erfolgreich durch das Einbinden der Nebenbedingungen durchgeführt. Die Optimierung in der Magnetoquasistatik könnte weiter mit einem globalen Suchalgorithmus untersucht werden, welcher das globale Minimum der Zielfunktion auf der konvexen Menge \tilde{F} findet.

Des Weiteren kann das Vorgehen für eine andere Bauformen von Spulen durchgeführt werden, bei der die Frequenz die Induktivität stärker beeinflusst. Als Beispiel sei hier die Ringkernspule genannt, bei der die magnetischen Feldlinien zum größten Teil den Ferritkern (stark frequenzabhängig) durchsetzen.

LITERATUR

- [1] Bauz Alexander; Neumeister Franz: *Modellierung, Simulation und Optimierung einer Zylinderspule*, Projekt EM CAD (WiSe' 2015): TU Berlin, 2015.
- [2] Boyd Stephen; Lieven Vanderberghe: *Convex Optimization*, Cambridge University Press: Cambridge, 2004.
- [3] Mühlethaler Jonas: *Modeling and multi-objective Optimization of inductive Power Components*, Dissertation: ETH Zürich, 2012.
- [4] Henke Heino: *Elektromagnetische Felder - Theorie und Anwendung*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Berlin, 2015.
- [5] Wheeler Harold A.: *Simple Inductance Formulas For Radio Coils*, The Institute of Radio Engineers, Inc.: Hoboken, 1928.
- [6] MATLAB R2013a®, Products: <http://de.mathworks.com/>: aufgerufen am 19.07.2016.
- [7] CST EM STUDIO 2016®, Products: <https://www.cst.com/>: aufgerufen am 19.07.2016.