

Berechnung linearer und polynomialer elektromagnetischer Eigenwertprobleme durch numerische Optimierung auf Mannigfaltigkeiten

Patrick Falk, Carla Schenker

Zusammenfassung—[CS] In diesem Bericht wird untersucht, inwieweit Optimierungsverfahren auf Mannigfaltigkeiten zum Lösen von Eigenwertproblemen verwendet werden können. Als Beispiel eines linearen Eigenwertproblems wird die Diskretisierung der Wellengleichung in einem Rechteckresonator betrachtet. Verschiedene Optimierungsverfahren werden an diesem Beispiel verglichen. Außerdem wird die Möglichkeit der Anwendung auf nichtlineare Eigenwertprobleme diskutiert.

Index Terms—Eigenwerte, Optimierung, Mannigfaltigkeit, polynomiales Eigenwertproblem, Rechteckresonator

I. EINLEITUNG [PF]

Eigenwertprobleme finden sowohl in der linearen Algebra, als auch in physikalischen Bereichen Anwendung. Eigenwerte können Aufschluss über verschiedene physikalische Eigenschaften liefern. In der elektromagnetischen Feldtheorie ist die Ermittlung der Eigenwerte von großer Bedeutung, da sie abhängig vom Wellenvektor \vec{k} der Resonanzfrequenz f_{res} einer TE₁₀₁-Mode entspricht. Besonders bei Hohlleiterresonatoren können verschiedene Moden bei bestimmten Frequenzen existieren. In Abschnitt II wird als Beispiel eines linearen Eigenwertproblems ein vakuumgefüllter Rechteckresonator mit ideal leitenden Wänden betrachtet. Die Diskretisierung dieses Beispiels mit der Finiten Integrations Technik (FIT) [1] wird in II-B beschrieben. In Abschnitt II-C wird die MATLAB [2] Toolbox Manopt [3] vorgestellt und erläutert, wie diese zur Eigenwertberechnung verwendet werden kann. Anschließend werden Vergleiche der verschiedenen Optimierungsalgorithmen (II-D) angestellt. Im Abschnitt III werden polynomialer Eigenwertprobleme als spezielle nichtlineare Eigenwertprobleme eingeführt. In diesem Zusammenhang wird neben einer Übersicht der verschiedenen Lösungsverfahren untersucht, ob eine Berechnung von Eigenwerten mit Manopt möglich ist.

II. LINEARES EIGENWERTPROBLEM

A. Beispiel Rechteckresonator[CS]

Zunächst wird als lineares Eigenwertproblem die Berechnung der Resonanzfrequenzen eines Rechteckresonators betrachtet. Der Resonator mit den Abmessungen a, b, l habe ideal leitende Wände und sei mit Vakuum gefüllt. Die Resonanzfrequenzen ω berechnen sich analytisch aus der Dispersionsbeziehung [4]

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2, \quad m, n, p = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Eingereicht am 31. August 2016.

wobei für die Existenz des (m, n, p) -Modes mindestens zwei der Ordnungszahlen m, n, p ungleich Null sein müssen.

B. Diskretisierung mit FIT [CS]

Diskretisiert wird die verlustlose und anregungsfreie Wellengleichung im Frequenzbereich

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{E} = \omega^2 \vec{E}. \quad (2)$$

Die diskrete Formulierung mit FIT ist gegeben durch [1]

$$M_\varepsilon^{-1} \tilde{C} M_\mu^{-1} C \vec{e} = \omega^2 \vec{e}, \quad (3)$$

mit dem Vektor aller elektrischen Gitterspannungen \vec{e} , den Rotationsmatrizen C und \tilde{C} sowie den Materialmatrizen M_ε und M_μ . Das Quadrat der Resonanzfrequenzen ω und die dazugehörigen Eigenlösungen \vec{e} berechnen sich als Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A_{cc} := M_\varepsilon^{-1} \tilde{C} M_\mu^{-1} C \in \mathbb{R}^{N \times N}$, wobei $N = 3$ ($\#$ Gitterpunkte $-\#$ Randpunkte). Da Berechnungen oft effizienter für symmetrische Matrizen durchgeführt werden können, wird die Matrix A_{cc} zunächst mit einer Ähnlichkeitstransformation symmetrisiert,

$$A'_{cc} = M_\varepsilon^{\frac{1}{2}} A_{cc} M_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = M_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tilde{C} M_\mu^{-1} C M_\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Die Eigenwerte bleiben unter Ähnlichkeitstransformationen erhalten. Es kann gezeigt werden, dass alle Eigenwerte von A' reell und nicht negativ sind [1]. Die Eigenlösungen zu den Eigenwerten $\omega^2 = 0$ sind statische Felder, die bei der Berechnung des Grundmodes, d.h. des Modes mit der kleinsten positiven Resonanzfrequenz, stören. Die statischen Moden \vec{e}_s , die nur durch Ladungen auf den inneren Gitterpunkten hervorgerufen werden können, werden durch eine entsprechende Eichung eliminiert. Es wird ausgenutzt, dass für die statischen Moden wegen $\operatorname{div} \vec{D} = \rho \neq 0$ gilt

$$A_{gd} \vec{e}_s := \tilde{S}^T D_n \tilde{S} M_\varepsilon \vec{e}_s \neq 0, \quad (5)$$

wobei D_n die Randpunkte herausfiltert. Auf A'_{cc} wird die ebenfalls symmetrisierte „grad-div“-Matrix $A'_{gd} := M_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{S}^T D_n \tilde{S} M_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ addiert,

$$(A'_{cc} + \alpha A'_{gd}) \vec{e}' = \omega^2 \vec{e}'. \quad (6)$$

Der Faktor α dient dazu, die Eigenwerte von A'_{gd} in den Bereich der Eigenwerte von A'_{cc} zu verschieben. Er wird heuristisch bestimmt als

$$\alpha = 0.99 \cdot \frac{\lambda_{max}(A'_{cc})}{\lambda_{max}(A'_{gd})}, \quad (7)$$

wobei λ_{max} den größten Eigenwert bezeichnet. Die Eigenwerte der dynamischen Moden verändern sich dadurch nicht. Die statischen Moden werden jedoch von Null zu positiven Eigenwerten verschoben, sogenannten Geister-Moden. Die Geister-Moden können mit einem Divergenz-Check wieder eliminiert werden:

$$\tilde{S}^T D_n \tilde{S} M_\varepsilon \tilde{e} \begin{cases} = 0, & \text{dynamischer Mode} \\ \neq 0, & \text{statischer Mode} \end{cases} \quad (8)$$

C. Eigenwertberechnung mit Manopt [CS]

Manopt ist eine MATLAB Toolbox für die Optimierung auf Mannigfaltigkeiten [3]. Die Berechnung des Grundmodes des linearen Eigenwertproblems (6) kann auch als ein Optimierungsproblem auf der Einheitssphäre interpretiert werden.

Sei dazu $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann hat C reelle Eigenwerte und es existiert eine Basis aus orthogonalen Eigenvektoren. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist der RAYLEIGH-Quotient von C und x definiert als [5]

$$R(C, x) := \frac{x^T C x}{x^T x}. \quad (9)$$

Wenn (λ, v) ein Eigenpaar von C ist, d.h. $Cv = \lambda v$, dann gilt $R(C, v) = \lambda$. Eine direkte Konsequenz des Satzes von COURANT-FISCHER [6] ist, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgende Abschätzung gilt

$$\lambda_{min}(C) \leq R(C, x) \leq \lambda_{max}(C). \quad (10)$$

Das Minimum wird dabei angenommen mit $x = v_{min}$, dem Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert $\lambda_{min}(C)$, und das Maximum dementsprechend mit $x = v_{max}$. Der kleinste Eigenwert der Matrix C kann also auch aus dem Minimierungsproblem

$$\lambda_{min}(C) = \min_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \left\{ \frac{x^T C x}{x^T x} \right\} = \min_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2=1} \{x^T C x\} \quad (11)$$

berechnet werden. Dies entspricht einer Minimierung auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$, also einer $n-1$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Das zu minimierende Funktional ist $f(x) = x^T C x$. Das Zielfunktional besitzt den Gradienten $\nabla f(x) = 2Cx$ und die HESSE-Matrix $f''(x) = 2C$.

Analog kann der größte Eigenwert $\lambda_{max}(C)$ aus dem Minimierungsproblem

$$-\lambda_{max}(C) = \min_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2=1} \{-x^T C x\} \quad (12)$$

berechnet werden. Dieses Verfahren kann auf die symmetrisierte und geeichte Matrix in Gleichung (6) angewendet werden und ermöglicht die Berechnung des kleinsten und größten Eigenwerts.

D. Vergleich der Optimierungsverfahren [PF]

In der Manopt Toolbox [3] stehen auf dem Gradienten basierende und gradientenfreie Verfahren zur Verfügung. Die gradientenfreien Optimierungsalgorithmen werden zum Vergleich nicht näher betrachtet, da ihre Genauigkeit und Rechenzeit den Gradientenverfahren unterlegen sind. Hierzu zählen der PARTICLE SWARM und der

NELDER MEAD SIMPLEX-Algorithmus. Das erste gradientenbehaftete Verfahren TRUST REGION arbeitet mit einem Vertrauensbereich, welcher von einem definierten Radius abhängig ist. Innerhalb dieses Bereiches wird das lokale Minimum gesucht. Bei mehreren Iterationsschritten nähert sich der Algorithmus somit der Lösung. Das zweite Optimierungsverfahren STEEPEST DESCENT sucht das Minimum der Kostenfunktion global und ist gleichzusetzen mit dem bekannten Gradientenabstiegsverfahren. Das letzte Optimierungsverfahren ist CONJUGATE GRADIENT, das besonders bei großen symmetrischen und positiv semidefiniten Matrizen eine bessere Performance verspricht.

Für den Vergleich der Optimierungsverfahren wird ein Beispiel aus der Literatur [4] herangezogen, da die analytische Lösung der Resonanzfrequenz $f_{res}=3\text{GHz}$ der ersten existierenden stehenden TE101-Mode bekannt ist. Das Beispiel [4] beschreibt einen Hohlraumresonator mit gleichen Abmessungen in allen drei Raumrichtungen $x, y, z = 7,07\text{cm}$. Die Gitterpunktzahl in den drei Koordinatenrichtungen wird auf $n_x = n_y = n_z = 30$ gesetzt.

Für die Untersuchung wird der kleinste Eigenwert betrachtet und berechnet. Die Simulation wird für eine Auswahl an Iterationen durchgeführt. Der relative Fehler des kleinsten Eigenwertes $\lambda_{min,k}$ wird hierbei mithilfe des analytischen Eigenwertes λ_{ref} berechnet. k steht für die Anzahl der Iterationen.

$$\text{relativer Fehler} = \frac{\|\lambda_{min,k} - \lambda_{ref}\|_{l2}}{\|\lambda_{ref}\|_{l2}} \quad (13)$$

λ_{ref} ist die Referenz des kleinsten Eigenwertes der analytischen Lösung und beträgt $3,5 \cdot 10^{20}$.

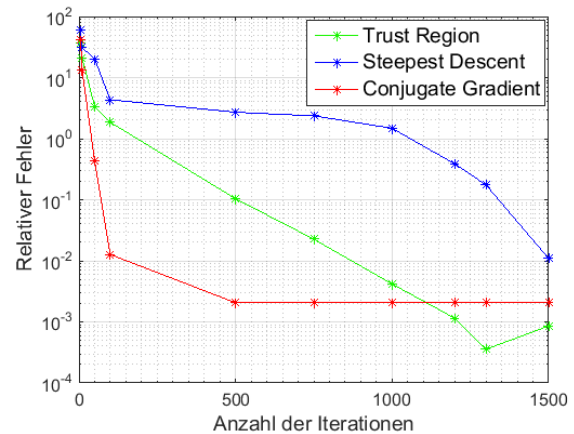


Abbildung 1. Relativer Fehler des kleinsten Eigenwertes $\lambda_{min,k}$

Hierbei konvergiert das CONJUGATE GRADIENT am schnellsten zum analytischen Eigenwert λ_{ref} . Bereits ab einer Iterationszahl von 500 konvergiert der relative Fehler gegen 10^{-3} . Wohingegen die anderen beiden Optimierungsverfahren bei einer Iterationszahl von 1500 noch nicht konvergiert sind. Wird weiterhin die Größenordnung des analytischen Eigenwertes ($\approx 10^{20}$) betrachtet, lässt sich zeigen, dass der relative Fehler für alle gradientenbehafteten Verfahren bereits bei einer kleinen Anzahl an Iterationen zufriedenstellende Ergebnisse

liefert. Um die Performance weiterhin zu validieren, wird die Rechenzeit der einzelnen Verfahren gemessen. Die Re-

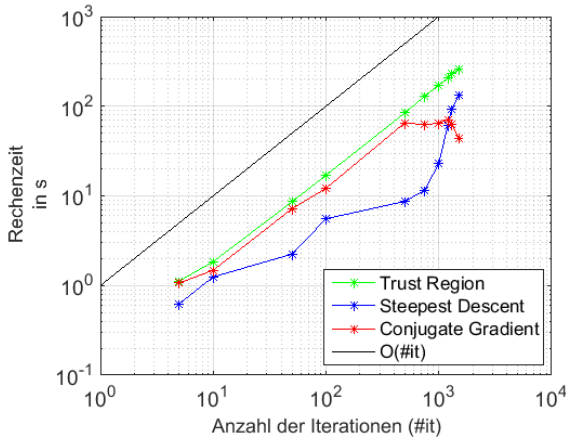


Abbildung 2. Rechenzeit der Optimierungsverfahren für die Ermittlung des kleinsten Eigenwertes

chenzeit in allen drei Fällen weist tendenziell ein lineares Verhalten auf, das bedeutet, dass bei einer Verdopplung der Iterationen die Rechenzeit sich ebenfalls verdoppelt. Für alle drei gradientenbehafteten Optimierungsverfahren wird die Norm des Gradienten auf 10^{-6} und die maximale Anzahl an Iterationen innerhalb der Manopt Toolbox [3] gleich gesetzt, um die Abbruchkriterien zu definieren und somit die Vergleichbarkeit zwischen den Verfahren zu gewährleisten. Das CONJUGATE GRADIENT-Verfahren (CG) hingegen besitzt ein nahezu lineares Verhalten bezüglich der Rechenzeit. Bei großen Iterationen jedoch wird der Algorithmus durch die Gradientenbedingung abgebrochen und die Rechenzeit verläuft konstant zur Anzahl der Iterationen. Der STEEPEST DESCENT-Algorithmus hat die geringste Rechenzeit für Iterationen kleiner als 1000, da der Algorithmus aufgrund seiner Einfachheit schneller verarbeitet wird.

III. POLYNOMIALES EIGENWERTPROBLEM [CS]

A. Polynomiale Eigenwertprobleme

Die Definitionen und Verfahren dieses Abschnitts orientieren sich an [5]. Für ein Matrixpolynom m -ten Grades

$$\Psi(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots + \lambda^m A_m, \quad (14)$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $A_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ist das polynomiale Eigenwertproblem definiert als: Finde λ (Eigenwert) und $v \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ (rechter Eigenvektor), sodass $\Psi(\lambda)v = 0$. Per Definition hat dieses Problem insgesamt nm Eigenwerte.

1) *Übersicht Lösungsverfahren:* In MATLAB steht zur Lösung von polynomialen Eigenwertproblemen die Funktion `polyeig` zur Verfügung. Dieser Algorithmus löst ein linearisiertes verallgemeinertes Eigenwertproblem der Größe nm mit QZ-Zerlegung. Da die Matrizen vollbesetzt abgespeichert werden, ist dieses Verfahren nur für kleine Matrixdimensionen geeignet. Es existieren Unterraum-Projektionsverfahren, wie

JACOBI-DAVIDSON oder Nonlinear ARNOLDI, auch für polynomiale Eigenwertprobleme. Es gibt jedoch dafür keine MATLAB Funktion wie beispielsweise `eigs` im linearen Fall. Ein intuitives Verfahren zur Berechnung einzelner Eigenwerte stellt die Fixpunktiteration dar. Eine Linearisierung in der Umgebung der Stützstelle τ

$$\Psi_{lin}(\tau, \lambda) = \underbrace{A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \dots + A_{m-1}\tau^{m-1}}_{:=B(\tau)} + A_m\lambda^m \quad (15)$$

führt zu dem verallgemeinerten Eigenwertproblem $B(\tau)v = -\lambda^m A_m v$, das linear in λ^m ist. Dieses kann als Fixpunktgleichung

$$\phi(\tau) := \text{Eigenwert}(\Psi_{lin}(\tau, \lambda))^{\frac{1}{m}} = \tau \quad (16)$$

interpretiert werden. Dabei wird ein Eigenwert $\lambda^m(\Psi_{lin})$ nahe am Wert τ^m gesucht. Die dazugehörige Fixpunktiteration lautet, für $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \tau_0 = \text{geeigneter Startwert} \\ \tau_{k+1} = \phi(\tau_k). \end{cases} \quad (17)$$

Bei der Berechnung der m -ten Wurzel werden die Vorzeichen von Realteil und Imaginärteil des komplexen Wertes λ entsprechend der gesuchten Lösung gewählt. In jedem Schritt kann `eigs` oder alternativ ein Optimierungsverfahren wie in Abschnitt II-C mit Zielwert τ_k^m zur Lösung des verallgemeinerten linearen Problems verwendet werden. Diese Art der Linearisierung hat den Vorteil, dass sie keine Vergrößerung der Dimension bewirkt. Ein Konvergenzbeweis mit dem Banachschem Fixpunktsatz ist allerdings nicht möglich. Das Verfahren konvergiert in vielen Fällen. Ob und wie schnell die Fixpunktiteration konvergiert, hängt vom Startwert ab. Die Fixpunktiteration und `polyeig` wurden für das folgende Beispiel in III-B verwendet.

B. Beispiel: Leitfähiges Material

Das Beispiel aus Abschnitt II-D wird erweitert, indem der Rechteckresonator mit einem schwach leitfähigen Material gefüllt wird, hier Wasser mit $\varepsilon_r = 80$, $\kappa = 50 \cdot 10^{-3} \frac{S}{m}$. Die Leitfähigkeit kann in eine komplexwertige Permittivität integriert werden

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r + \frac{\kappa}{j\omega}. \quad (18)$$

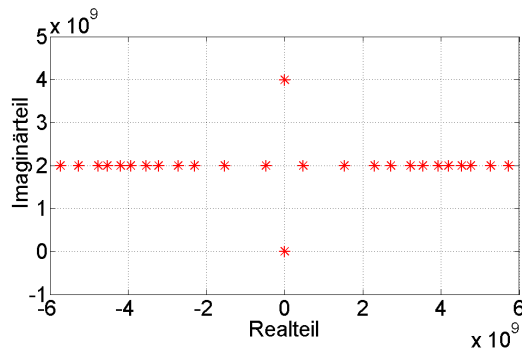
Daraus ergibt sich im kontinuierlichen Fall die Gleichung:

$$\left(\text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} + j\kappa\omega - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \right) \vec{E} = 0 \quad (19)$$

In der FIT-Formulierung entspricht Gleichung (19) dem polynomialen Eigenwertproblem 2. Grades

$$(\omega^2 A_2 + \omega A_1 + A_0) \vec{e} = 0 \quad (20)$$

mit den Matrizen $A_0 := \tilde{C} M_\mu^{-1} C$, $A_1 := j\kappa I_d$ und $A_2 := -\varepsilon_0 \varepsilon_r I_d$. Die Eigenwerte, die mit `polyeig` für $n_x = n_y = n_z = 5$ berechnet wurden, sind in Abbildung 3 zu sehen.


 Abbildung 3. Eigenwerte von (20) berechnet mit `polyeig`

Mit dem Startwert $\tau_0 = (1+j) \cdot 10^9$ konvergiert die Fixpunktiteration beispielsweise gegen den Eigenwert $(1.5271\dots + 1.9968\dots \cdot j) \cdot 10^9$. Ein relatives Residuum

$$\frac{\|(\tau_k^2 A_2 + \tau_k A_1 + A_0) \hat{e}_k\|}{|\tau_k|} \quad (21)$$

von weniger als 10^{-7} , das dem relativen Residuum dieses Eigenwerts berechnet mit `polyeig` entspricht, wird dabei nach 44 Iterationen erreicht.

C. Möglichkeit der Eigenwertberechnung mit `Manopt`

Die folgenden Definitionen und Sätze orientieren sich an [6]. Im linearen Fall wird zur Eigenwertberechnung mit `Manopt` der RAYLEIGH-Quotient (9) verwendet und die Abschätzung (10) ausgenutzt. Ähnliche Abschätzungen gelten unter gewissen Voraussetzungen für nichtlineare RAYLEIGH-Funktionale. Sei $\Psi(\lambda)$ ein Matrixpolynom mit hermiteschen Matrizen. Dies stellt sicher, dass alle Eigenwerte reell sind.

Annahme1 : Für alle $v \in \mathbb{C}^n$ habe $v^* \Psi(\lambda) v = 0$ höchstens eine Lösung $\lambda := R(v) \in J \subset \mathbb{R}$.

Dadurch ist implizit ein RAYLEIGH-Funktional R auf einem gewissen Definitionsbereich $D(R)$ definiert.

Annahme2 : Es gelte

$$(\lambda - R(v))(v^* \Psi(\lambda) v) > 0 \quad (22)$$

für alle $v \in D(R)$ und $\lambda \in J$, $\lambda \neq R(v)$.

Dann hat $\Psi(\cdot)$ höchstens n Eigenwerte in J : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ und es gilt:

$$\text{Falls } \lambda_1 \in J : \lambda_1 = \min_{v \in \mathbb{C}^n \cap D(R)} R(v) \quad (23)$$

$$\text{Falls } \lambda_n \in J : \lambda_n = \max_{v \in \mathbb{C}^n \cap D(R)} R(v) \quad (24)$$

1) *Überdämpfte Probleme*: Wenn $D(R) = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, dann wird das Problem $\Psi(\lambda)v = 0$ überdämpft (engl. *overdamped*) genannt. Für ein überdämpftes Problem gilt:

$\Psi(\cdot)$ hat genau n Eigenwerte in J : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ und

$$\lambda_1 = \min_{v \in \mathbb{C}^n} R(v), \quad \lambda_n = \max_{v \in \mathbb{C}^n} R(v) \quad (25)$$

Dies entspricht der Abschätzung (10) im linearen Fall und deshalb kann die gleiche Strategie wie im linearen Fall zur Eigenwertberechnung mit `Manopt` benutzt werden. Es muss lediglich der RAYLEIGH-Quotient durch die entsprechenden

RAYLEIGH-Funktionale ersetzt werden und deren Gradient berechnet werden.

Für quadratische Probleme gibt es eine einfache Form für die Überdämpfungs-Bedingung und auch für die RAYLEIGH-Funktionale [6]. Das quadratische Problem

$(A\omega^2 + B\omega + C)v = 0$ mit hermiteschen und positiv definiten Matrizen $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist überdämpft, falls

$$(u^* B u)^2 - 4(u^* A u)(u^* C u) > 0 \quad \forall u \neq 0. \quad (26)$$

Das Problem hat die zwei RAYLEIGH-Funktionale:

$$R_{+,-}(v) = \frac{-v^* B v \pm \sqrt{(v^* B v)^2 - 4(v^* A v)(v^* C v)}}{2v^* A v}. \quad (27)$$

Ähnliche analytische Formeln existieren für Polynome bis Grad 4.

Ein Test mit einem einfachen quadratischen Problem der Größe $n = 10^3$, das diese Bedingungen erfüllt, zeigt, dass mit Minimierung und Maximierung der zwei RAYLEIGH-Funktionale die vier Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ und λ_{2n} berechnet werden können. Dabei sind $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{2n}$ die Eigenwerte des Matrixpolynoms.

IV. ZUSAMMENFASSUNG [PF]

Neben der bekannten `eigs`-Funktion in MATLAB konnte das lineare Eigenwertproblem mittels der MATLAB Toolbox `Manopt` gelöst werden. Das CONJUGATE GRADIENT-Verfahren (CG) weist unter den drei verwendeten Optimierungsverfahren in `Manopt` das beste Konvergenzverhalten auf. Zusätzlich wächst die Rechenzeit linear mit der Anzahl der Iterationen, sodass der Einsatz von CG für die Berechnung des kleinsten Eigenwerts gerechtfertigt ist. Der relative Fehler ist in Bezug auf die Größenordnung des Eigenwertes der analytischen Lösung sehr klein, so dass die drei gradientenbehafteten Verfahren gute Ergebnisse hervorbrachten. Bei der Lösung von polynomialen Eigenwertproblemen kann `Manopt` zur Lösung des linearen Problems innerhalb einer Fixpunktiteration verwendet werden. Die Konvergenz der Fixpunktiteration ist jedoch nicht gesichert und vom Startwert abhängig. Es kann gezeigt werden, dass die Eigenwertberechnung polynomialer Probleme durch Minimierung und Maximierung von RAYLEIGH-Funktionalen für hermitesche und überdämpfte Probleme möglich ist. Für nicht-überdämpfte Probleme ist die Situation komplizierter, denn im Allgemeinen liegen nicht alle Eigenwerte im Bildbereich J der RAYLEIGH-Funktionale und es bleibt zu prüfen, dass $\mathbb{C}^n \cap D(R)$ eine Mannigfaltigkeit ist.

LITERATUR

- [1] T. Weiland, R. Schuhmann, *Elektromagnetische Feldsimulation*, Vorlesungsskript
- [2] MATLAB- *The Language of Technical Computing*, 2014. [Online]. Verfügbar: <http://www.mathworks.de/products/matlab>
- [3] N. Boumal, B. Mishra, P.-A. Absil, R. Sepulchre, *Manopt, a Matlab Toolbox for Optimization on Manifolds*, Journal of Machine Learning Research Vol. 15, 2014, 1455-1459.
- [4] Henke, H., *Elektromagnetische Felder : Theorie Und Anwendung*, 5., Erw. Aufl. ed. Berlin ; Heidelberg: Springer Vieweg, 2015.
- [5] B. T. Bandlow, Diss. *Zur Berechnung elektromagnetischer Eigenwertprobleme in der numerischen Simulation von Nanostrukturen mit periodischen und transparenten Randbedingungen*, Universität Paderborn, 2011.
- [6] Hogben, Leslie. *Handbook of Linear Algebra*, 2.nd ed. Boca Raton, Fla. [u.a.]: CRC Press, Taylor Francis, 2014.